Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Задача в приближенном нахождении функции $u = u(x, y)$, удовлетворяющей в области определения D уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in D \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in D^0 \end{cases}$$

и принимающей значения *g(x,y)* на границе D^0 области *D*. Здесь функции *f* и *g* задаются при постановке задачи. Данный пример обычно используется для постановки учебно-практической задачи при организации способов параллельных вычислений. Для простоты будем использовать в качестве области *D* единичный квадрат

$$D = \{(x, y) \in D : 0 \le x, y \le 1\}$$

Конечно-разностная аппроксимация производных

Определение производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Аппроксимация:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) = \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right)$$

Метод конечных разностей (метод сеток)

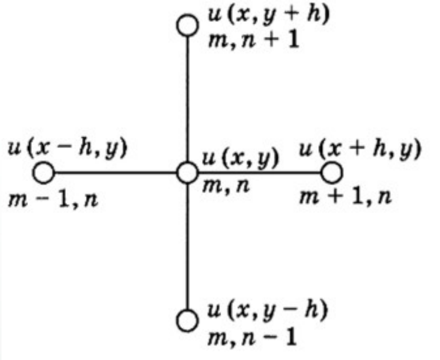
Область решения *D* представляется в виде дискретного набора (сетки) точек (узлов). Например, равномерная сетка в области *D*, может быть задана следующим образом:

$$\begin{cases} D_h = \{(x_i, y_j):\ x_i = ih,\ y_j = jh, 0 \le i, j \le N+1,\} \\ h = 1/(N+1), \end{cases}$$

где число *N* задает число узлов по каждой из координат области *D*. В результате численного решения получают численную аппроксимацию функции $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$.

При использовании пяти-точечного шаблона, уравнение Пуассона в конечно-разностной форме имеет вид

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}}{h^2} = f_{ij}$$



и может быть разрешено относительно u_{ij}:

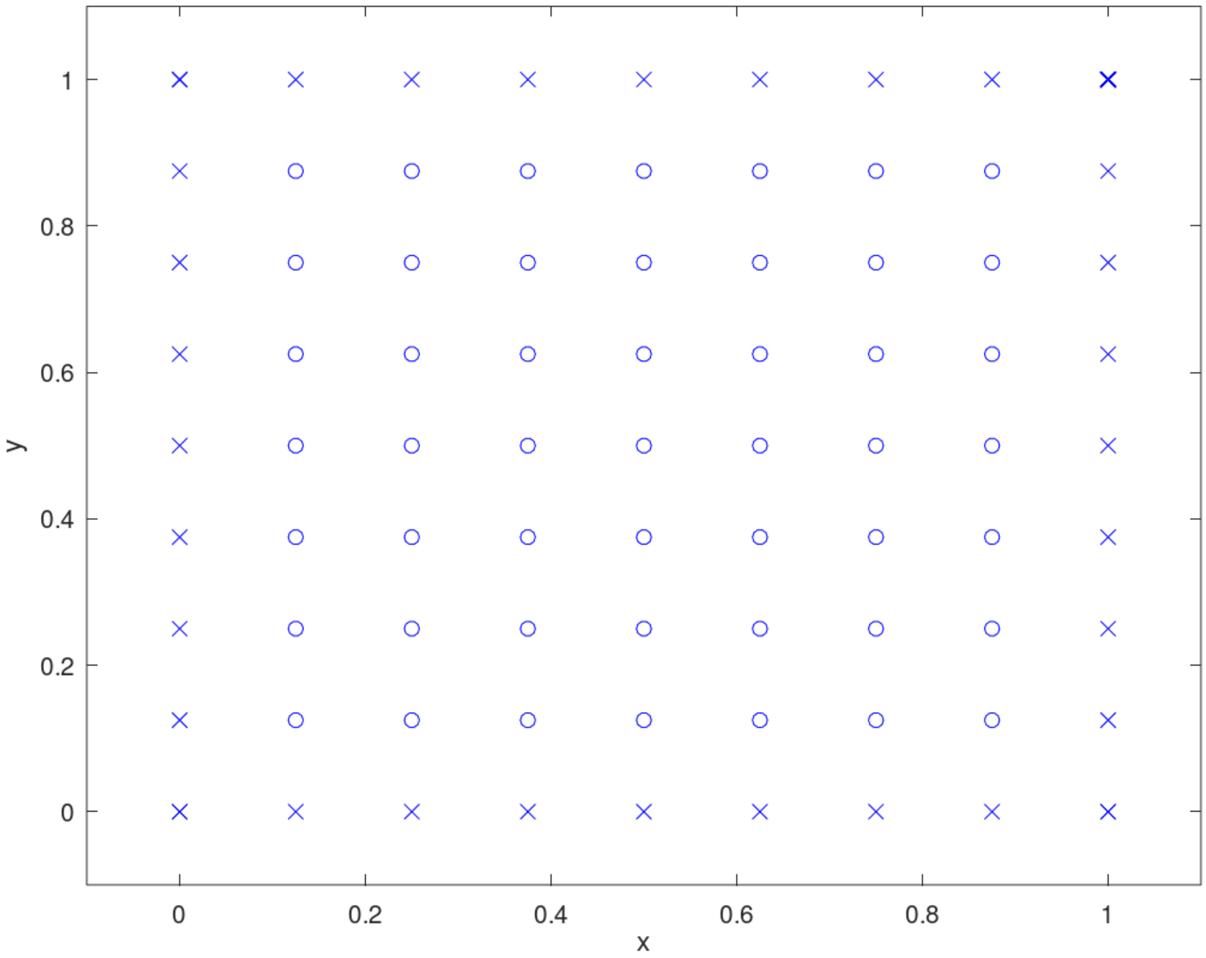
$$u_{ij} = 0.25\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - h^2 f_{ij}\right)$$

Метод Гаусса-Зейделя

Уравнение на предыдущем слайде позволяет определять значение u_{ij} по известным значениям *u(x,y)* в соседних узлах. Это обстоятельство используется для построения различных итерационных схем решения задачи Дирихле (краевой задачи). В начале вычислений формируется некоторое начальное приближение для всех u_{ij}, а затем эти значения уточняются в соответствии с выбранной итерационной схемой. Метод Гаусса-Зейделя использует правило

$$u_{ij}^{k} = 0.25\left(u_{i-1,j}^{k}+u_{i+1,j}^{k-1}+u_{i,j-1}^{k}+u_{i,j+1}^{k-1}-h^2 f_{ij}\right)$$

Можно увидеть, что метод использует текущее *k*-ое приближение если оно уже вычислено и предыдущее *(k-1)*-ое, если его еще нет на *k*-ой итерации при определенном порядке вычислений.



0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
y

Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока получаемые в результате итераций значения изменения u_{ij} не станут меньше некоторой заданной величины или требуемой точности вычислений.

ВНИМАНИЕ !!! Значения u_{ij} при индексах $i,j=0,N+1$ являются граничными, задаются при постановке задачи и не изменяются в итеративной процедуре.

Задача 1. Написать код на Fortran-90, который будет допускать

1) задание различных граничных условий, обязательно «сшитых» в углах области,

2) задание произвольной правой части, т. е. функции $f(x,y)$,

3) задание N,

4) задание точности вычислений по максимальному по области D отклонению u_{ij} ,

5) запись результатов в текстовый файл в виде матрицы для контроля результата.