Математическое программирование.
Лекция 3. Решение СЛАУ (продолжение)

Предварительные замечания

Если существуют такие вектор $\boldsymbol{x}$ и число λ, что для заданной матрицы $\boldsymbol{A}$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} ,$$

то они называются *собственным вектором* и *собственным числом матрицы* $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{A}$ является *положительно определенной*, если выполняется одно из следующих условий:

1. $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

2. $\lambda_i > 0, \quad i=1,2,\ldots,n$.

Метод простых итераций

Пусть есть уравнение

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} .$$

Представим матрицу в виде суммы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, причем $\det \boldsymbol{B} \neq 0$, тогда можно записать уравнение

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}$$

и умножив слева левую и правую часть уравнения на $\boldsymbol{B}^{-1}$, получить следующее уравнение:

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} .$$

Выбираем начальное приближение $\boldsymbol{u}_0$ и реализуем метод простых итераций (МПИ)

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{g} .$$

МПИ сходится если сходится итерационный процесс, т. е. Существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k$.

Пусть $\boldsymbol{u}^*$ это точное решение СЛАУ, тогда имеют место две теоремы.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости МПИ):
Если $\|\boldsymbol{G}\| = q < 1$, то существует единственное решение $\boldsymbol{u}^*$ уравнения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}$ при любом начальном приближении, причем

$$\|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}^*\| \leq q \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}^*\| .$$

Теорема 2 (критерий сходимости МПИ):
Для сходимости итерационного процесса $\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{g}$ к $\boldsymbol{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $\boldsymbol{G}$ были по модулю меньше единицы, т. е. $|\lambda_i(\boldsymbol{G})| < 1, \quad \forall i=1,2,\ldots,n$.

Частный случай МПИ это однопараметрический МПИ. Вводится итерационный параметр $\tau > 0$, на него умножается исходная СЛАУ и прибавляется $\boldsymbol{u}$ слева и справа, т. е.

$$\tau \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \tau \boldsymbol{f} + \boldsymbol{u} ,$$

затем представляется в виде

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{(\boldsymbol{I} - \tau \boldsymbol{A})}_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{u} + \underbrace{\tau \boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} .$$

Итерационный процесс имеет вид

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{g} .$$

Если $\boldsymbol{A}$ положительно определенная и симметричная, то однопараметрический метод сходится при

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}(\boldsymbol{A})} .$$

Матрицу системы можно сделать симметричной умножением системы на $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$. Оптимальным считается значение

$$\tau_{опт} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} .$$

Если $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$, то можно оценить число итераций для достижения точности ε :

$$N = \left[\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{\|\boldsymbol{g}\|} \right)}{\ln q} \right] + 1 .$$

Пример:

Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, оценить число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

Однопараметрический МПИ предполагает, что матрица системы симметричная, поэтому исходную систему необходимо модифицировать умножив слева на $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$. Новая система имеет вид

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}' ,$$

где $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$. Применяя к этому уравнению МПИ и выражение для числа итераций, оценить число итерации в среде Octave самостоятельно. Методическое указание: вычислить максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\boldsymbol{B}$ (команда eig), вычислить $\tau_{опт}$, матрицу $\boldsymbol{G}$ и её 2-норму q (команда norm), определить вектор $\boldsymbol{g}$ и воспользоваться формулой для N , используя 2-норму для вектора $\boldsymbol{g}$ и команду log для вычисления натурального логарифма.

Метод Якоби.

В этом методе матрица системы представляется в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$, где $\boldsymbol{L}$ - нижняя треугольная матрица с нулевой диагональю, $\boldsymbol{D}$ - диагональная матрица, $\boldsymbol{U}$ - верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Если СЛАУ имеет вид $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, то итерационный метод Якоби

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} + (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{f}$$

или

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{g} .$$

Вопросы сходимости метода Якоби проясняют две теоремы.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода): метод Якоби сходится к точному решению $\boldsymbol{u}^*$, если выполнено условие *диагонального преобладания*, т. е.

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}| .$$

Теорема 2 (критерий сходимости метода): для сходимости метода Якоби к $\boldsymbol{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю были ≤ 0 .

Пример:

Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 0.001$, оценить число итераций метода Якоби для начального приближения нулевым вектором и заданной точности используя среду Octave. Методическое указание: приступить к решению только после решения предыдущего примера.

Метод Зейделя

В этом методе то же разбиение матрицы системы,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U} ,$$

но итерационный процесс имеет другой вид,

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{f}$$

или

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} = -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\cdot\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} + (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})^{-1}\cdot\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{g} .$$

Имеется пара теорем о сходимости метода Зейделя.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Зейделя): метод Зейделя сходится к точному решению $\boldsymbol{u}^*$, если матрица $\boldsymbol{A}$ - вещественная, симметричная и положительно определенная.

Теорема 2 (критерий сходимости метода Зейделя): для сходимости метода Зейделя к точному решению $\boldsymbol{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все кони уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю были ≤ 0 .

Метод верхней релаксации

Метод представляет собой модификацию метода Зейделя с итерационным процессом на основе формулы

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}} + \boldsymbol{D}\frac{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k+1}}+p\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}}{1+p} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{f}$$

Обычно с *показателем релаксации* p связывают итерационный параметр $\tau = 1+p$, выбирают $\tau_{опт}$ и задают $p = \tau_{опт} - 1$.