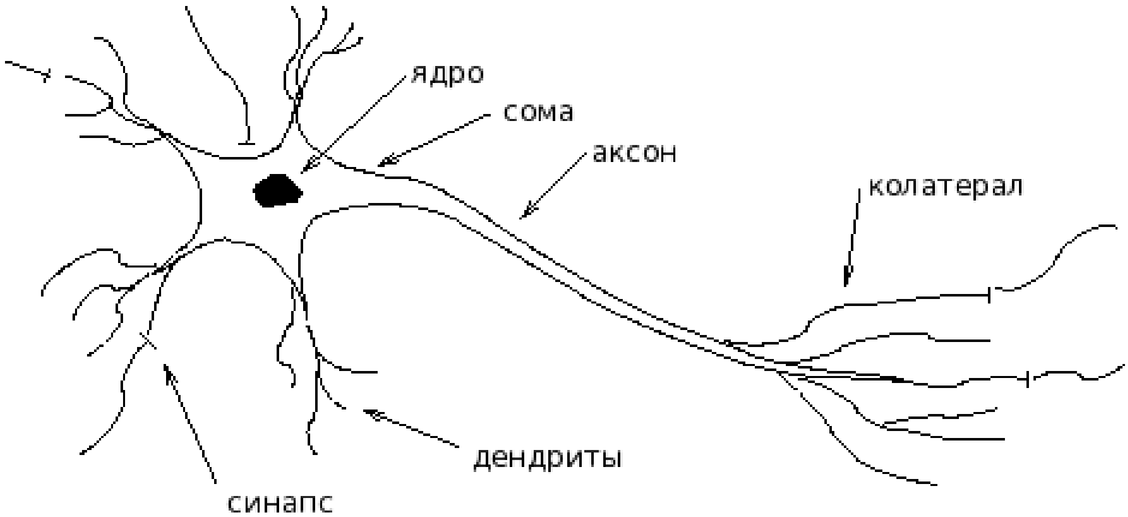
Нейронные сети. Краткий курс

Лекция 1

Что такое нейронные сети.

Исследования по искусственным нейронным сетям представляют собой попытку научиться у живой природы технологии обработки информации так как это происходит в нервной системе животных. Основным элементом нервной системы является клетка называемая *нейроном*. У нейрона имеется тело со стандартным набором органелл или *сома*, из которой выходят многочисленные отростки. Можно выделить два типа отростков: многочисленные тонкие ветвящиеся *дендриты* и более толстый *аксон*, который расщепляется на конце и имеете многочисленные нервные окончания на конце, называемые *колатералами* (или *коллатералями*). Входные сигналы поступают в клетку через *синапсы*, а выходной сигнал отводится аксоном через колатералы, которые контактируют с дендритами и непосредственно с сомой других нейронов. Передача сигналов внутри нервной системы достаточно сложный электрохимический процесс. Если упростить, что можно считать, что передача нервного импульса между двумя нейронами основана на выделении *нейромедиаторов* в области синапсов, которые воздействуют на клеточную мембрану вызывая ее поляризацию и уровень поляризации зависит от суммарного количества нейромедиаторов, выделенных во всех синапсах. Для нашего рассмотрения важно лишь то, что каждому входу клетки можно приписать численные коэффициенты (веса) пропорциональные количеству нейромедиатора однократно выделенного на каждом синапсе. Эти веса могут принимать как отрицательные (тормозящие), так и положительные (возбуждающие) значения. Если отклонение от электрического равновесия невелико в результате действия всех пришедших сигналов, то клетка приходит самостоятельно в исходное состояние, и на ее выходе никакие изменения не регистрируются. Если же суммарное возбуждение превышает некоторый порог, то значение выходного сигнала начинает лавинообразно нарастать и вдоль аксона распространяется нервный импульс, который передается другим нейронам. После выполнения своей функции, нейромедиатор удаляется. Одновременно с генерацией нервного импульса запускается процесс рефракции, в течение которого нейрон на некоторое время вообще теряет способность к возбуждению. Частота, с которой нейрон может генерировать импульсы ограничивается примерно 100 Гц. Считается, что человеческий мозг содержит порядка 10^{11} нейронов, которые связаны между собой связями в количестве порядка 10^{14}-10^{15}.

Итак, несмотря на относительно низкое быстродействие отдельного нейрона человеческий мозг или мозг летучей мыши справляется с задачей распознания лиц или с задачей эхолокацией быстрее чем любой компьютер. Очевидно, что свою силу нейронные сети черпают из распараллеливания обработки информации и способности самообучаться и создавать обобщения. Под обобщением понимается способность получать обоснованный результат на основании данных, которые не встречались в процессе обучения. Эти свойства позволяют нейронным сетям решать трудноразрешимые на сегодняшний день задачи. Конечно, на практике одни только нейронные сети не могут обеспечить готовые решения, их необходимо интегрировать в сложные системы, в которых некоторые задачи будут решаться с помощью нейронных сетей.



Рассмотрим некоторые полезные свойства систем содержащих нейронные сети (независимо от того реализованы они программно на обычных компьютерах или аппаратно в специализированных нейрокомпьютерах).

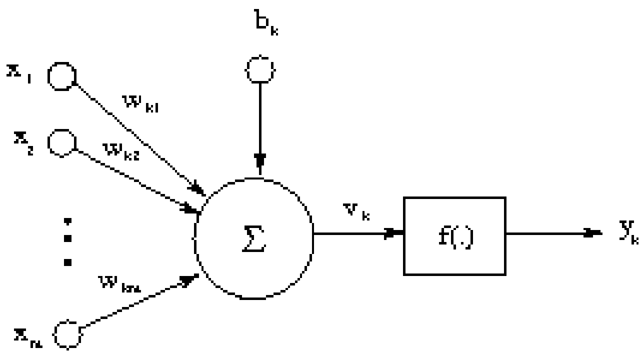
1. *Нелинейность.* Искусственные нейроны могут быть нелинейными, поэтому и сами нейронные сети на основе таких нейронов являются нелинейными. Эта нелинейность распределена по сети. Нелинейность является важным свойством, особенно если необходимо обрабатывать информацию о физическом процессе, который сам по своей природе является нелинейным.
2. *Отображение входной информации в выходную.* Одной из популярных парадигм обучения является так называемое *обучение с учителем* на основе *учебных примеров*, которые состоят из входного сигнала и соответствующего ему *желаемого отклика*. При предъявлении учебного примера нейронная сеть модифицирует синаптические веса для минимизации расхождений желаемого выходного сигнала и формируемого сетью. Такое обучение проводится до тех пор пока расхождение станет незначительным.
3. *Адаптивность.* Нейронные сети могут адаптировать свои синаптические веса к изменениям окружающей среды, то есть при изменении условий могут легко переучиваться или доучиваться.
4. *Отказоустойчивость.* Нейронные сети, реализованные аппаратно, потенциально отказоустойчивы. Это обусловлено распределенным характером хранения информации в различных связях нейронной сети, если какой-либо нейрон или связь повреждены, то это не означает полной потери нейронной сетью её свойств.

5. *Единообразие анализа и проектирования*. Нейронные сети предоставляют универсальный механизм обработки информации, то есть одно и то же проектное решение нейронной сети может использоваться в различных предметных областях.

Модели нейронов

Нейрон представляет собой своеобразную единицу обработки информации в нейронной сети. Ниже представлена блок схема изображающая модель нейрона. В этой модели можно выделить три основных элемента.

1. Набор синапсов или связей, которые характеризуются своими весами на которые умножаются входные сигналы.
2. Сумматор, который складывает входные сигналы взвешенные относительно соответствующих синапсов нейрона.
3. Функция активации, обеспечивающая сжимающее отображение взвешенного суммарного сигнала, так что выходной сигнал имеет ограниченный диапазон, обычно лежащий в интервале [0,1] или [-1,1].

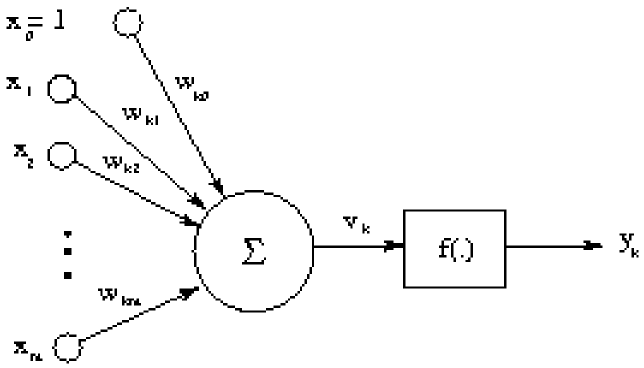


В математическом представлении функционирование k-го нейрона можно описать следующими формулами:

$$v_k = \sum_{j=1}^{m} w_{kj} x_j + b_k \quad , \qquad (1.1)$$

$$y_k = f(v_k) \quad ,$$

где $x_{1,} x_{2,} \ldots, x_m$ - входные сигналы; $w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{km}$ - синаптические веса k-го нейрона; v_k - линейная комбинация входных воздействий и порогового элемента b_k ; f - функция активации; y_k - выходной сигнал нейрона. Можно ввести порог и иным образом дополнив входной вектор еще одним входным сигналом x_0 , который положить всегда равным единице, тогда за порог будет отвечать вес w_{k0} . Блок схема отображающая такое представление изображена ниже.



В этом случае аргумент функции активации вычисляется по формуле

$$v_k = \sum_{j=0}^{m} w_{kj} x_j \quad , \tag{1.2}$$

что оказывается удобным при матричной реализации вычислений.
Обычно используются несколько основных типов функции активации.

1. Функция единичного скачка, или пороговая функция (или функция Хевисайда).

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \geq 0; \\ 0, & v < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Эту модель в литературе называют моделью Мак-Каллока-Питца в честь пионерской работы этих авторов.

2. Кусочно-линейная функция:

$$f(v) = \begin{cases} 0, & v \leq -\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} + v, & -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}; \\ 1, & v \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Эту функцию можно рассматривать как аппроксимацию нелинейного усилителя с коэффициентом усиления равным единице.

3. Сигмоидальная функция. График этой функции напоминает букву S.

Распространенная функция, используемая в искусственных нейронных сетях. Примером такой функции является логистическая функция

$$f(v)=\frac{1}{1+\exp(-av)} \quad , \tag{1.5}$$

где a – параметр наклона сигмоидальной функции. Эта функция имеет область значений [0,1]. Однако иногда требуется, чтобы функция активации имела областью значений отрезок [-1,1]. Тогда используется в качестве функции активации гиперболический тангенс:

$$f(v)=\tanh(v) \quad . \tag{1.6}$$

Рассмотренная модель нейрона является детерминистской. В некоторых приложениях используются стохастические нейросетевые модели, тогда решение о переключении нейрона принимается с учетом вероятности этого события, то есть

$$f(v)=\begin{cases} +1, & \textit{с вероятностью}\, P(v); \\ -1, & \textit{с вероятностью} \quad 1-P(v). \end{cases} \tag{1.7}$$

Вероятность $P(v)$ описывается сигмоидальной функцией вида

$$P(v)=\frac{1}{1+\exp(-v/T)} \quad , \tag{1.8}$$

где T - аналог температуры, характеризующий уровень синаптического шума.

Многослойный перцептрон

Теорема Колмогорова (1957 г.):

Любая непрерывная функция от n переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *может быть представлена в виде*

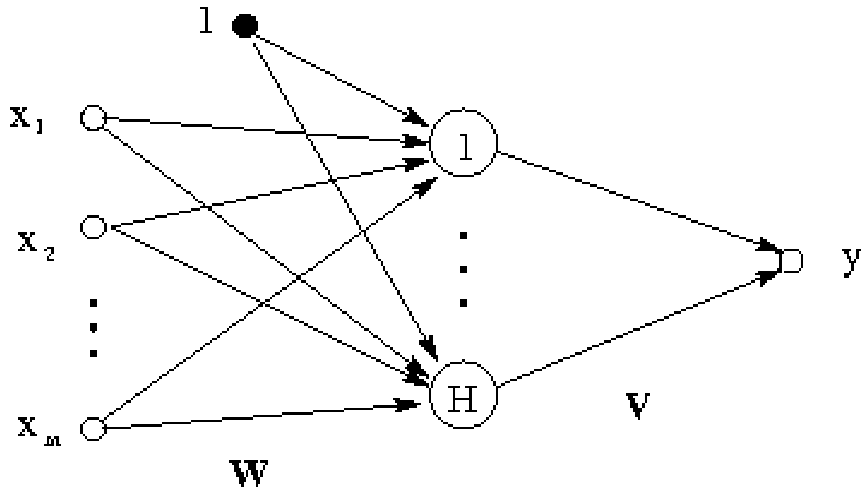
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{2n+1} g_j\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ij}(x_i)\right) \quad , \tag{1.9}$$

где g_j *и* h_{ij} *- непрерывные функции, причем* h_{ij} *не зависят от функции F.*

Эта теорема означает, что для реализации функций многих переменных достаточно операций суммирования и композиции функций одной переменной. Конечно, применить эту теорему на практике достаточно сложно, поскольку ничего неизвестно о виде функций входящих в выражение для F. Однако эта теорема показала принципиальную возможность реализации сколь угодно сложных зависимостей с помощью относительно простой нейронной сети, называемой многослойным персептроном. Схема такой сети показана ниже на блок-схеме. На данной схеме $\boldsymbol{W}$ - матрица весов связей между входными нейронами и нейронами скрытого слоя, которые собственно и реализуют функцию активации; $\boldsymbol{V}$ - матрица весов связей между выходами нейронов скрытого слоя и выходным нейроном сети. Собственно такую сеть называют трехслойным персептроном имея в виду входной слой, выходной слой и скрытый слой нейронов реализующих функцию активации. Такая сеть реализует следующее отображение:

$$y=\sum_{i=1}^{H} v_i f\left(w_{i,0}+w_{i,1}x_1+w_{i,2}x_2+\ldots+w_{i,m}x_m\right) \quad , \tag{1.10}$$

Здесь *f* – функция активации нейрона скрытого слоя.



Новый вариант теоремы Колмогорова был опубликован в 1989 г. одновременно несколькими авторами:

1. *Hornick, Stinchcombe, White. Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators. Neural Networks, 1989, v. 2, № 5.*
2. *Cybenko. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function. Mathematical Control Signals Systems, 1989, 2.*
3. *Funahashi. On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks. Neural Networks, 1989, v. 2, № 3.*

Все эти работы стали классическими. Теорема формулируется теперь в следующем виде (как в работе 2):

Пусть $F(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_m)$ *- любая непрерывная функция определенная на ограниченном множестве, и* $\epsilon>0$ *- любое сколь угодно малое число, означающее точность аппроксимации. Обозначим еще через* $\sigma(x)$ *сигмоидную функцию активации. Тогда*

Теорема: Существует такое число H *, числа* w_{ij},u_i *и числа* v_i *такие, что функция*

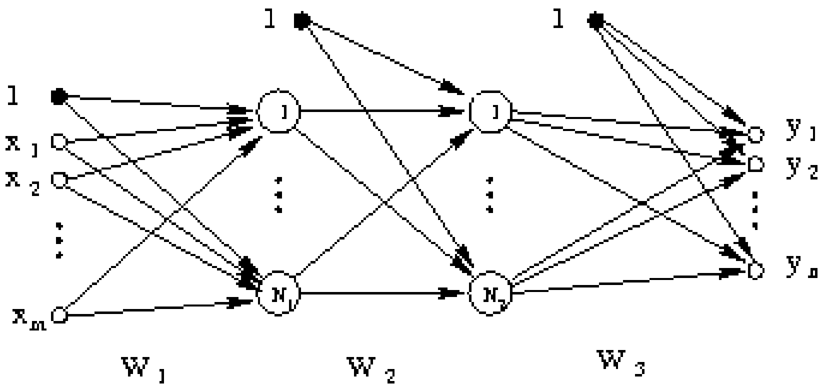
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{H} v_i \sigma(w_{i1} x_1 + w_{i2} x_2 + \ldots + w_{im} x_m + u_i) \quad (1.11)$$

приближает данную функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *с погрешностью не более* ϵ *на всей области определения.*

Эта формула совпадает с функцией реализуемой персептроном. В терминах теории нейросетей эта теорема формулируется так. Любую непрерывную функцию нескольких переменных можно с любой точностью реализовать с помощью обычного трехслойного перцептрона с достаточным количеством нейронов в скрытом слое.

В общем случае многослойный персептрон (или просто нейронная сеть прямого распространения) может содержать несколько слоев скрытых нейронов и осуществлять отображение из одного векторного пространства признаков произвольной размерности в другое векторное пространство другой произвольной размерности.

Пример сети прямого распространения с двумя скрытыми слоями нейронов реализующих функцию активации изображен ниже на схеме.



В принципе может быть использовано любое количество слоев. Согласно теореме об аппроксимации нейронной сетью любой функции достаточно и одного слоя скрытых нейронов с достаточным их количеством, однако сети с большим количеством скрытых слоев иногда демонстрируют меньшее время обучения.

Если обозначить как $\boldsymbol{x} = (1, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)^T$ (вектор столбец), а в обозначении элемента матрицы весов w_{ij} считать, что первый индекс соответствует нейрону к которому приходить связь, а второй индекс соответствует нейрону от которого приходит связь, то преобразование осуществляемое нейронной сетью с двумя скрытыми слоями можно представить в виде следующих матрично-векторных операций:

$$\boldsymbol{input}_1 = \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{x} \quad ,$$

$$\boldsymbol{output}_1 = \sigma\left(\boldsymbol{input}_1\right) \quad ,$$

$$\boldsymbol{input}_2 = \boldsymbol{W}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{output}_1 \end{pmatrix} \quad , \qquad (1.12)$$

$$\boldsymbol{output}_2 = \sigma\left(\boldsymbol{input}_2\right) \quad ,$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{output}_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Здесь векторы $\boldsymbol{input}_i$ и $\boldsymbol{output}_i$ ($i=1,2$) обозначают входной и выходной векторы скрытого слоя нелинейных нейронов, а обозначение вида $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{output}_i \end{pmatrix}$ обозначает дополнение выходного вектора единицей в его начале. Если договориться, что первый индекс в обозначении элемента матрицы весов соответствует нейрону от которого идет связь, а второй нейрону к которому идет связь, то это будет соответствовать умножению векторов строк слева на матрицы весов.