## Статистическая радиофизика и теория информации

### 1. Введение

Радиофизика как наука изучает физические явления существенные для радиосвязи, излучения и распространения радиоволн, приема радиосигналов. Предметом радиофизики также является изучение различных объектов (атомных ядер, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т.п.) средствами радиотехники. Статистическая радиофизика имеет своим предметом случайные процессы в радиофизике, как-то случайные электрические колебания и волны.

Проблема флуктуаций (шумов) становится тем существеннее, чем все более чувствительными становятся измерительные (или приемные устройства) и чем более высокие скорости передачи информации становятся необходимы.

Математической основой статистической радиофизики является теория случайных процессов, т.е. случайных скалярных или векторных функций от времени, а если речь идет о случайных полях, то еще и функций от радиус-вектора. Рассмотрим в качестве иллюстрации постановку и решение простой задачи обнаружения сигнала средствами статистической теории.

**Обнаружение сигнала на фоне шума**

Итак имеется сигнал – случайный физический процесс, отображающий передаваемую информацию. Задача – использовать статистическую теорию для обнаружения сигнала на фоне шума. Пусть наблюдатель измерил реализацию случайного процесса $x(t)$, который представляет собой

- а) только шум либо
- б) сигнал $s(t)$ + шум.

Пусть $q$ - априорная вероятность случая а). Пусть также шум является гауссовой помехой. При измерении в момент времени $t_1$ получено $x(t_1)=x_1$, при этом возможно в измерении присутствует сигнальная составляющая $s(t_1)=s_1$. Требуется найти, какому из случаев а) или б) лучше соответствует результат измерения.

Приступим к решению этой задачи. Поскольку реализация случая а) или б) при измерении является достоверным событием, то априорная вероятность случая б) $p=1-q$. Так как по условию задачи помеха является гауссовой, то ее функция распределения плотности вероятности случайной величины с дисперсией $\sigma^2$ может быть записана для случаев а) и б) как

$$\text{а)} \qquad w_ш(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\text{б)} \qquad w_{c+ш}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x_1-s_1)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.2}$$

Пусть $x_n$ - пороговое значение измеренного сигнала, такое что если

$x_1 > x_n$ - сигнал $s$ есть (случай б),
$x_1 \le x_n$ - сигнала $s$ нет (случай а).

Остается определить наилучшее значение $x_n$ . Такое, которое обеспечивает минимальную вероятность ошибок обнаружения сигнала. Здесь могут иметь место ошибки двух типов:

1) ложная тревога, т.е. $x_1 > x_n$ , но сигнала нет;
2) пропуск сигнала, т.е. $x_1 \le x_n$ , но сигнал есть.

Вероятность ложной тревоги определяется следующим выражением:

$$P_1=q\int_{x_n}^{\infty} w_ш(x)\,dx \quad . \tag{1.3}$$

А вероятность пропуска следующим:

$$P_2=p\int_{-\infty}^{x_n} w_{c+ш}(x)\,dx \quad . \tag{1.4}$$

Таким образом вероятность полной ошибки

$$P=P_1+P_2=q\int_{x_n}^{\infty} w_ш(x)\,dx+p\int_{-\infty}^{x_n} w_{c+ш}(x)\,dx \quad . \tag{1.5}$$

Таким образом нужно отыскать такое значение $x_n$ , которое соответствует минимуму ошибки *P*. Наилучшее значение $x_n$ можно отыскать из условия

$$\frac{dP}{dx_n}=0 \tag{1.6}$$

или более подробно

$$\frac{d}{dx_n}\left(q\int\limits_{x_n}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx+p\int\limits_{-\infty}^{x_n}\exp\left(-\frac{(x-s_1)^2}{2\sigma^2}\right)dx\right)=0 \quad . \tag{1.7}$$

Далее последовательность выкладок по определению порогового значения:

$$-q\exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right) + p\exp\left(-\frac{(x_n-s_1)^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \quad , \tag{1.8а}$$

$$\frac{p}{q}\exp\left(-\frac{(x_n-s_1)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \tag{1.8б}$$

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{(x_n-s_1)^2}{2\sigma^2} = -\frac{x_n^2}{2\sigma^2} \quad , \tag{1.8в}$$

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{s_1^2}{2\sigma^2} = -\frac{x_n s_1}{\sigma^2} \quad , \tag{1.8г}$$

и наконец

$$x_n = \frac{s_1}{2}-\frac{\sigma^2}{s_1}\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{s_1}{2}\left(1-\frac{2\sigma^2}{s_1^2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right) \quad . \tag{1.9}$$

Теперь критерий обнаружения сигнала $x_1 > x_n$ можно записать в виде

$$x_1 s_1 > \frac{s_1^2}{2}-\sigma^2\ln\left(\frac{p}{q}\right) \quad . \tag{1.10}$$

Такая запись удобна, чтобы проиллюстрировать возможность создания устройства для обнаружения сигнала. На практике обычно не выносят решения о наличии сигнала по одному измерению, а проводят серию измерений в заданные моменты времени $t_k,\ k=1,2,3,...$ Для простоты рассуждений (выкладок) пусть эти измерения статистически независимы. Это можно осуществить разнеся моменты измерений достаточно далеко. Тогда многомерная плотность распределения тогда многомерные плотности распределения $w_ш(x_1,x_2,...)$ и $w_{c+ш}(x_1,x_2,...)$ заменятся по теореме перемножения вероятностей на $\prod_k w_ш(x_k)$ и $\prod_k w_{c+ш}(x_k)$. В этом случае легко повторить выкладки и получить условие

$$\sum_k x_k s_k > \frac{1}{2}\sum_k s_k^2 - \sigma^2 \ln\left(\frac{p}{q}\right) = U_0 \ . \qquad (1.11)$$

Рассмотренная задача это простейший пример статистической процедуры обнаружения сигналов. Ниже показана схема простейшего корреляционного приемника для обнаружения сигнала.

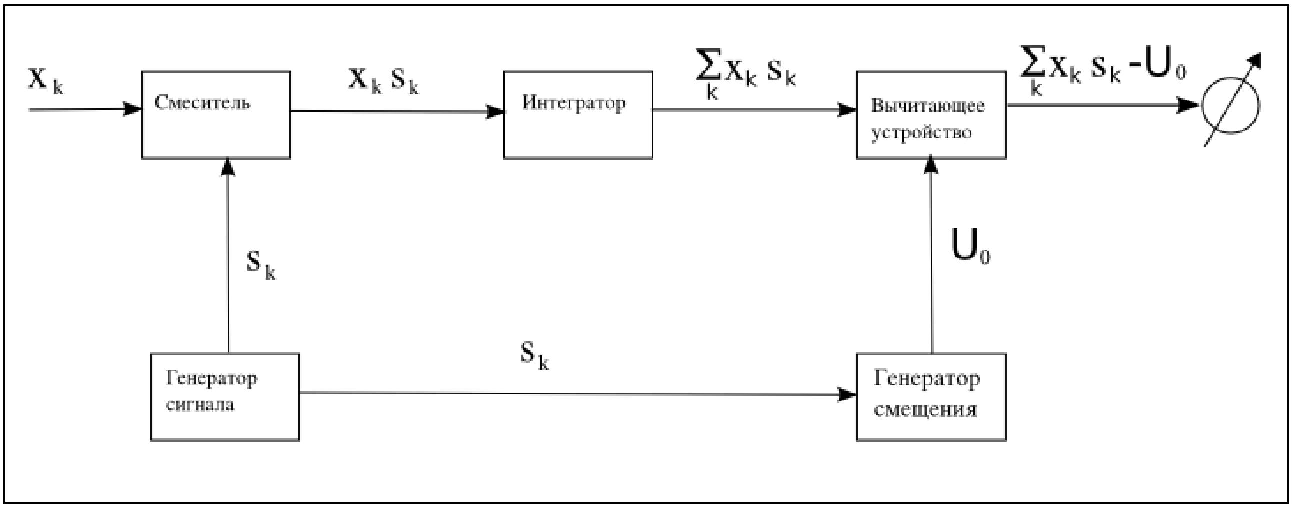


Рис. 1.1 Структурная схема корреляционного детектора сигнала

## 2. Основы теории случайных процессов

Как уже упоминалось, математическая основа статистической радиофизики – теория случайных процессов. Если каждому значению $t \in T$ , где $T$ – некоторое множество действительных чисел, поставлена в соответствие случайная величина $X(t)$ , то говорят, что на множестве $T$ задана *случайная функция*. Случайная функция это случайная величина зависящая от неслучайного аргумента *t*. Если *t* интерпретируется как время, то $X(t)$ - *случайный процесс*. $X$ может быть действительным числом, комплексным числом, вектором. Еще случайный процесс интерпретируют как семейство случайных величин $X(t, \omega)$ (или функцию двух переменных), заданных на одном и том же пространстве элементарных событий $\Omega$ . Однако в данном курсе, вторую переменную мы будем часто опускать.

Случайный процесс в некоторых случаях можно задавать формулой. Например, $X(t) = Y \sin t$ , где $Y$ - случайная величина. Или добавить еще и случайную фазу, т.е. $X(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ , где $Y$ и $\phi$ - случайные величины, а частота $\omega$ величина неслучайная. При фиксированном $t = t_0$ , случайный процесс обращается в случайную величину $X(t_0)$ , которая называется *сечением случайного процесса*. *Реализацией* или *траекторией* случайного процесса называется неслучайная функция $x(t) = X(t, \omega_0)$ , полученная в результате испытания.

Случайный процесс можно характеризовать *одномерным законом распределения*, т.е. функцией

$$F_t(x) = P\{X(t) < x\} \quad . \tag{2.1}$$

Однако такая функция не является исчерпывающей характеристикой с.п. Случайный процесс $X(t)$ представляет собой совокупность всех сечений при различных $t \in T$ , поэтому для более полного описания с.п. следует рассматривать совместную функцию распределения сечений процесса. Определим следующую функцию:

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2,\ \ldots,\ X(t_n) < x_n\} \quad . \tag{2.2}$$

Функция (2.2) это так называемый *конечномерный закон распределения* с.п. В моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ , который по существу характеризует многомерную случайную величину $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ . Таким образом, можно сказать, что понятие случайного процесса является обобщением понятия системы случайных величин на случай, когда их бесконечно много.

Случайные процессы протекающие в физической системе представляют собой случайные переходы системы из одного состояния в другое. В зависимости от множества состояний и множества значений аргумента *t*, с.п. делят на классы:

1. дискретный процесс с дискретным временем;
2. дискретный процесс с непрерывным временем;
3. непрерывный процесс с дискретным временем;
4. непрерывный процесс с непрерывным временем.

*Математическое ожидание с.п.*

$$m_x(t) = M\left[X(t)\right] \tag{2.3}$$

это неслучайная функция, которая при любом фиксированном $t$ равна математическому ожиданию соответствующего сечения процесса.

Пусть $X(t)$ - случайный процесс, а $f(t)$ - неслучайная функция. Математическое ожидание с.п. обладает следующими свойствами:

1. м.о. неслучайной функции есть сама функция, т.е.

$$M\left[f(t)\right] = f(t) \quad ; \tag{2.4}$$

2. неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания,

$$M\left[f(t)X(t)\right] = f(t)m_x(t) \quad ; \tag{2.5}$$

3. математическое ожидание суммы (разности) двух с.п. равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых, т.е.

$$M\left[X(t) \pm Y(t)\right] = m_x(t) \pm m_y(t) \quad . \tag{2.6}$$

Зафиксировав аргумент $t$ и переходя от случайного процесса к случайной величине, каковой является сечение с.п. можно найти математическое ожидание этого процесса. Так, если сечение с.п. $X(t)$ при данном $t$ есть непрерывная случайная величина с плотностью $W(t,x)$, то его математическое ожидание можно найти по формуле

$$M\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,W(t,x)\,dx \quad . \tag{2.7}$$

*Дисперсия с.п.* $X(t)$ это неслучайная функция $D_X(t)$, которая для каждого $t$ равна дисперсии соответствующего сечения:

$$D_X(t) = D\left[X(t)\right] \overset{\text{def}}{\equiv} M\left[(X(t)-m_x(t))^2\right] = M\left[X^2(t)\right]-m_x^2(t) \quad . \tag{2.8}$$

Наряду с дисперсией, используется среднее квадратическое отклонение (с.к.о.)

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)} \quad . \tag{2.9}$$

Значения каждой реализации с.п. при каждом значении $t$ отклоняются от математического ожидания на величину порядка $\sigma_X(t)$ .
Дисперсия с.п. обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия неслучайной функции равна нулю, т.е.

$$D\left[f(t)\right] = 0 \quad . \tag{2.10}$$

2. Дисперсия с.п. неотрицательна, т.е.

$$D_X(t)=\sigma_X^2(t) \quad . \tag{2.11}$$

3. Дисперсия произведения неслучайной функции на случайную функцию равна произведению квадрата неслучайной функции на дисперсию случайной функции, т.е.

$$D\left[f(t)X(t)\right] = f^2(t)D_X(t) \quad . \tag{2.12}$$

4. Дисперсия суммы (разности) с.п. и неслучайной функции равна дисперсии с.п., т.е.

$$D\left[X(t)\pm f(t)\right] = D_X(t) \quad . \tag{2.13}$$

Математическое ожидание и дисперсия не являются исчерпывающими характеристиками случайного процесса. Для того, чтобы характеризовать зависимость между двумя или более сечениями используется *ковариационная функция* – аналог ковариации для пары случайных величин, характеризующей степень связи между случайными величинами.

*Ковариационной функцией* с.п. $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_X(t_1,t_2)$, которая при каждой паре значений $t_1$ и $t_2$ равна корреляционному моменту (ковариации) соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ :

$$K_X(t_1,t_2) = M\left[\left(X(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_X(t_2)\right)\right] \tag{2.14}$$

или

$$K_X(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = M\left[X(t_1)X(t_2)\right] - m_X(t_1)m_X(t_2) \quad , \tag{2.15}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_X(t)$ - центрированная случайная функция. Если случайные величины входящие в (2.14) не центрированы, то соответствующая функция называется *корреляционной*, т.е.

$$R_X(t_1,t_2) = M\left[X(t_1)X(t_2)\right] \tag{2.16}.$$

Если математическое ожидание процесса нулевое, то корреляционная и ковариационная функции совпадают. Ниже приведены свойства корреляционной функции:

1. Ковариационная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии с.п., т.е.

$$K_X(t,t) = D_X(t) \quad . \tag{2.17}$$

2. Ковариационная функция не меняется при перестановке аргументов, т.е.

$$K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1) \tag{2.18}$$

3. Если к с.п. прибавить неслучайную функцию, то ковариационная функция

не изменится, т.е. если $Y(t)=X(t)+f(t)$ , то

$$K_Y(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) \ . \tag{2.19}$$

4. Модуль ковариационной функции не превосходит произведения среднеквадратических отклонений, т.е.

$$|K_X(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)} = \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2) \ . \tag{2.20}$$

5. Если $Y(t)=X(t)f(t)$ , то

$$K_Y(t_1,t_2) = f(t_1)f(t_2)K_X(t_1,t_2) \ . \tag{2.21}$$

Свойство 1 позволяет говорит, что математическое ожидание и корреляционная функция дают исчерпывающее описание с.п. так что дисперсия является избыточной. Иногда удобно использовать нормированную корреляционную функцию $r_X(t_1,t_2)$ , определяемую формулой

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \ . \tag{2.22}$$

## 3. Классификация случайных процессов

Случайный процесс с n-мерной гауссовской плотностью распределения вероятностей $W(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *гауссовским*. Напомню, что эту п.р.в. можно записать используя матричные и векторные обозначения следующим образом

$$W(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\boldsymbol{K}|}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A})\right] \ , \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{K}$ - ковариационная матрица, а $|\boldsymbol{K}|$ - ее определитель.

Важный класс с.п. это стационарные случайные процессы, т.е. такие процессы, которые не изменяют свои характеристики с течением времени. Такие процессы представляют собой колебания вокруг некоторого среднего.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если

1. $M\left[|X(t)|^2\right] < +\infty$ ;
2. $m_X(t) = m_X = const$ ;
3. $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$ , т.е. к.ф. зависит только от одного аргумента, то же самое касается и $K_X$ .

К. ф. стационарного случайного процесса (с.с.п.) обладает следующими свойствами:

1. $K_X(t, t) = K_X(t - t) = K_X(0) = D_X(t) = const$ ;
2. $|K_X(\tau)| \le K_X(0)$ , это легко получить, если воспользоваться (2.20);
3. $K_X(-\tau) = K_X(\tau)$ , т.е. функция четная, это очевидно из (2.18).