Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 2.

3. Классификация процессов (продолжение)

В прошлой лекции уже было дано определение стационарного процесса в широком смысле. Если при сдвиге всех *n* сечений на величину τ вид n-мерной плотности распределения вероятности не изменяется, то такой случайный процесс называется *стационарным в узком смысле* или *строго стационарным*. В этом случае

$$W\left[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\right] = W\left[x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \ldots, x(t_n+\tau)\right] . \qquad (3.2)$$

По аналогии с системой случайных величин, для двух с.п. можно определить взаимную корреляционные функцию:

$$R_{XY} = M\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 W(x_1, y_2) dy_2 , \qquad (3.3)$$

где $x_1 = x(t_1)$ и $y_2 = y(t_2)$. Корреляция между значениями двух с.п. задается корреляционной матрицей (или ковариационной если с.п. центрированы)

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_2) & R_{XY}(t_1, t_2) \\ R_{YX}(t_1, t_2) & R_Y(t_1, t_2) \end{bmatrix} , \qquad (3.4)$$

причем эта матрица симметричная, т.е. $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_1, t_2)$.

Для стационарных в широком смысле с.п. взаимные к.ф. обладают следующими свойствами:

1. Для совместно стационарных в широком смысле с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ взаимная к.ф. Зависит только от разности отсчетов, причем

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(-\tau) . \qquad (3.5)$$

2. Взаимная к.ф. необязательно имеет максимум при $\tau = 0$, однако

$$|R_{XY}(0)| \leq \sqrt{|R_X(0) R_Y(0)|} \quad . \qquad (3.6)$$

3. Если два стационарных с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ статистически независимы, то

$$R_{XY}(\tau) = M\left[X_1 Y_2\right] = M\left[X_1\right] M\left[Y_1\right] = m_x m_y = R_{YX}(\tau) \quad . \qquad (3.7)$$

4. Если $X(t)$ - стационарный с.п., а $\dot{X}(t)$ - его производная по времени, то

$$R_{X\dot{X}}(\tau) = -dR_X(\tau)/d\tau \quad . \qquad (3.8)$$

Процесс $X(t)$ называется *циклостационарным с периодом T в узком смысле*, если его функция распределения инвариантна относительно сдвига на целое число периодов *T*, т.е. для каждого целого *m* выполняется

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1+mT, t_2+mT, \ldots, t_n+mT}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad . \qquad (3.9)$$

Процесс $X(t)$ называется *циклостационарным с периодом T в широком смысле*, если для каждого целого *m* выполняется

$$m_X(t+mT) = m_X(t); \quad R_X(t_1+mT, t_2+mT) = R_X(t_1, t_2) \quad . \qquad (3.10)$$

Большинство стационарных случайных процессов обладают эргодическим свойством, сущность которого состоит в том, что по одной достаточно длинной реализации можно судить о всех свойствах процесса так же как и по любому количеству реализаций. Вопрос об эргодичности процесса возникает в том случае, когда известна всего одна реализация процесса. Очевидно, что заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени можно только если среднее по ансамблю значение не зависит от времени, что собственно является свойством с.с.п. В этом случае временное среднее приближается к среднему по ансамблю если продолжительность реализации стремится к бесконечности. Рассмотрим среднее по времени процесса $X(t)$ на интервале $\left(-T; T\right)$:

$$m_T = \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \quad . \qquad (3.11)$$

Поскольку оценка среднего m_T случайная величина, то можно вычислить ее среднее:

$$M\left[m_T\right] = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} M\left[x(t)\right]dt = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} m_X\,dt = m_X \ . \qquad (3.12)$$

Если дисперсия оценки среднего $\sigma_T^2 = M\left[(m_T - m_X)^2\right] \to 0$ при $T \to \infty$, то говорят, что $m_T \to m_X$ при $T \to \infty$ в среднеквадратическом смысле.

Определение: Если $M\left[m_T\right] = m_X$ и $\lim\limits_{T\to\infty} \sigma_T^2 = 0$, то говорят, что случайный процесс *эргодический по среднему значению* или *эргодический по отношению к математическому ожиданию*.

Таким образом, для стационарного случайного процесса эргодического по среднему значению достаточно взять одну, достаточно протяженную во времени реализацию, чтобы получить оценку неизвестного среднего (мат. ожидания с.с.п.).

Теорема. Необходимым и достаточным условием эргодичности по среднему значению с.п. $X(t)$ является условие

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{2\mathrm{T}}\left(1-\frac{\tau}{2\mathrm{T}}\right)K_X(\tau)\,d\tau\right\} = 0 \ . \qquad (3.13)$$

Доказательство этого условия можно получить, показав, что

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_{0}^{2\mathrm{T}}\left(1-\frac{\tau}{2\mathrm{T}}\right)K_x(\tau)\,d\tau \ . \qquad (3.14)$$

С другой стороны, дисперсию можно выразить следующим образом:

$$\sigma_T^2 = M\left[(m_T - m_X)^2\right] = M\left[m_T^2\right] - m_X^2 = m_2 - m_X^2 \ .$$

Найдем сначала второй начальный момент:

$$m_2 = M\left[m_T^2\right] = M\left[\frac{1}{2\text{T}}\int_{-T}^{T} x(u)\,du \frac{1}{2\text{T}}\int_{-T}^{T} x(v)\,dv\right] = \frac{1}{4\text{T}^2} M\left[\int_{-T}^{T} x(u)\,du \int_{-T}^{T} x(v)\,dv\right] =$$

$$= \frac{1}{4\text{T}^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} M\left[x(u)\,x(v)\right]du\,dv = \frac{1}{4\text{T}^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_X(u-v)\,du\,dv \qquad (3.15)$$

Тогда

$$\sigma_T^2 = m_2 - m_X^2 = \frac{1}{4\text{T}^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} K_X(u-v)\,du dv \quad . \qquad (3.16)$$

Здесь пригодилось свойство (2.15) из прошлой лекции и определение (2.14а). Произведем замену переменных в (3.16) $\tau = u - v$, $\alpha = v$ (старые через новые - $u = \tau + \alpha$, $v = \alpha$) с якобианом перехода

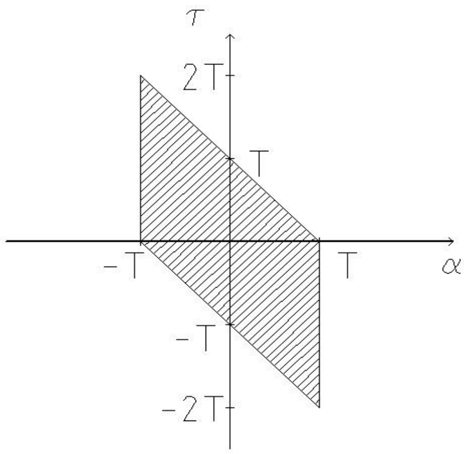
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \tau} & \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; .$$

После такой замены (3.16) можно переписать в виде

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4\text{T}^2}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-T-\alpha}^{T-\alpha} K_X(\tau)\,d\tau\right]d\alpha = \frac{1}{4\text{T}^2}\left[\int_{-2\text{T}}^{0} K_X(\tau)\,d\tau \int_{-T-\tau}^{T} d\alpha + \int_{0}^{2\text{T}} K_X(\tau)\,d\tau \int_{-T}^{T-\tau} d\alpha\right] =$$

$$= \frac{1}{2\text{T}}\left[\int_{-2\text{T}}^{0} K_X(\tau)\left(1+\frac{\tau}{2\text{T}}\right)d\tau + \int_{0}^{2\text{T}} K_X(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2\text{T}}\right)d\tau\right] = \frac{1}{T}\int_{0}^{2\text{T}}\left(1-\frac{\tau}{2\text{T}}\right)K_X(\tau)\,d\tau \quad .$$

Второе равенство станет понятным если представить область интегрирования в координатах α и τ :



Последнее же равенство получено с использованием четности ковариационной функции, т.е. того, что $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$.

Естественным продолжением утверждения (3.13) является теорема Слуцкого: необходимым и достаточным условием эргодичности с.п. $X(t)$ по среднему является условие

$$\lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T K_X(\tau)\, d\tau \right\} = 0 \ . \tag{3.17}$$

Достаточным условием эргодичности с.п. по среднему является

$$\int_0^\infty K_x(\tau)\, d\tau < +\infty \tag{3.18}$$

или

$$\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = m_x^2 \ ,$$

что эквивалентно

$$\lim_{\tau \to \infty} K_x(\tau) = 0 \ .$$

Аналогично эргодичности по среднему можно рассмотреть эргодичность по дисперсии и по ковариационной функции. Аналогично теореме Слуцкого, имеется теорема для дисперсии.

Теорема. Необходимым и достаточным условием эргодичности по дисперсии является условие

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T K_x^2(\tau)\,d\tau\right\}=0\quad. \tag{3.19}$$

Стационарный случайный процесс является *эргодическим по ковариационной функции* если

$$K_x(\tau)=\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\overset{\circ}{X}(t+\tau)\overset{\circ}{X}(t)\,dt\quad, \tag{3.20}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x$, а $l.i.m.$ означает предел в среднем (limit in mean). По определению такого предела это значит, что

$$\lim_{T\to\infty}M\left[\left|K_x(\tau)-\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\overset{\circ}{X}(t+\tau)\overset{\circ}{X}(\tau)\,dt\right|^2\right]=0\quad. \tag{3.21}$$

Условия эргодичности для дискретных процессов записываются похожим образом, вместо интегралов там фигурируют суммы.

Оценка среднего (аналог 3.11)

$$m_N=\frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{n=-N}^{N}x[n] \tag{3.22}$$

является несмещенной, поскольку $M\left[x_N\right]=m_x$.

Теорема (аналог 3.13). Необходимым и достаточным условием эргодичности случайного процесса $x[n]$ по среднему значению является

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{m=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}}\left(1-\frac{|m|}{2\mathrm{N}+1}\right)K_x[m]\right\}=0\quad. \tag{3.23}$$

Утверждение аналогичное теореме Слуцкого, для дискретного случайного процесса: $x[n]$ является эргодическим по среднему тогда и только тогда когда выполняется условие

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N} K_x[m]\right\}=0 \quad . \tag{3.24}$$

Теорема (аналог 3.19). Необходимым и достаточным условием эргодичности дискретного случайного процесса является условие

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N} K_x^2[m]\right\}=0 \quad . \tag{3.25}$$

И наконец необходимое и достаточное условие эргодичности для дискретного случайного процесса выглядит как

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1-|k|}\left(1+\frac{k+m}{N}\right)\left(R^2[m]+R[m+k]R[m-k]\right)\right\}=0 \quad . \tag{3.26}$$