Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 3.

4. Теорема Винера-Хинчина для непрерывных процессов.

Рассмотрим реализацию случайного процесса $x(t)$ на отрезке $[0,T]$. Как для любой функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, для этой реализации можно рассмотреть преобразование Фурье:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{T} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{x}_T(\omega) \quad . \qquad (4.1)$$

Для преобразования Фурье верно равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega \quad . \qquad (4.2)$$

Величину слева и справа в 4.2 можно трактовать как энергию сигнала (реализации с.п.). Если рассмотреть среднюю мощность реализации, то можно записать

$$P = \overline{x_T^2} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad . \qquad (4.3)$$

Величину $S(\omega, T) = \dfrac{|\hat{x}(\omega)|^2}{T}$ называют периодограммой с.п. $X(t)$. Перейдем к пределу в 4.3 устремив к бесконечности длину временного интервала:

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad . \qquad (4.4)$$

Введем среднее значение периодограммы по ансамблю реализаций

$$S_T(\omega) = M\left[\frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T}\right]$$

Тогда можно ввести величину, которая является еще и пределом при $T \to \infty$:

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} M\left[S(\omega, T)\right] = \lim_{T \to \infty} S_T(\omega) \quad .$$

Теперь если усреднить 4.4, то можно получить следующее соотношение:

$$M\left[\overline{x^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \quad . \qquad (4.5)$$

Слева в 3.5 мощность случайного процесса, если она измеряется в Вт, то $S(\omega)$ измеряется в $\frac{Вт}{Гц} = Вт \times с = Дж$. Поэтому величину $S(\omega)$ называют *спектральной плотностью мощности* или *спектральной плотностью* или *энергетическим спектром* (э.с.).

Если случайный процесс имеет $m_X \neq 0$, то энергетический спектр можно представить как

$$S(\omega) = m_x^2 2\pi\, \delta(\omega) + \tilde{S}(\omega) \quad . \qquad (4.6)$$

Если 4.6 проинтегрировать применяя обратное преобразование Фурье, то получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} m_x^2 2\pi\, \delta(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega)\, d\omega = m_x^2 + \sigma_x^2 \quad ,$$

откуда можно сказать, что первое слагаемое отвечает за мощность постоянной составляющей, а второе за мощность флуктуационной компоненты.

Теорема Винера-Хинчина (справедлива для стационарных с.п.): энергетический спектр с.п. и его корреляционная функция связаны между собой через прямое и обратное преобразования Фурье, т.е.

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad , \qquad (4.7)$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad . \qquad (4.8)$$

Доказательство проведем для случая $m_X=0$:

Рассмотрим реализацию для $t\in[-T,T]$:

$$\hat{x}_T(\omega)=\int_{-T}^{T} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Тогда

$$S_T(\omega)=M\left[S(\omega,T)\right]=M\left[\frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{2\mathrm{T}}\right]=\frac{1}{2\mathrm{T}}M\left[\hat{x}_T(\omega)\hat{x}_T^*(\omega)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{T}}M\left[\int_{-T}^{T} x(u)e^{-i\omega u}du\int_{-T}^{T} x(v)e^{i\omega v}dv\right]=\frac{1}{2\mathrm{T}}M\left[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} x(u)x(v)e^{-i\omega(u-v)}dudv\right]=$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} M\left[x(u)x(v)\right]e^{-i\omega(u-v)}dudv=\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(u-v)dudv \quad .$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы о необходимом и достаточном условии эргодичности с.п. по среднему в предыдущей лекции, естественно провести замену переменных $\tau=u-v$ и $\alpha=v$ и пользуясь аналогичными приемами получить

$$S_T(\omega)=\int_{-2\mathrm{T}}^{2\mathrm{T}}\left(1-\frac{|\tau|}{2\mathrm{T}}\right)R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad . \qquad (4.9)$$

Переходя к пределу при $T\to\infty$,получим

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}S_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}dv \quad .$$

Таким образом доказано первое утверждение теоремы, т.е. выражение 4.7.

Поскольку периодограмма $S_T(\omega)=\dfrac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T}$ это неотрицательная величина, то и при предельном переходе выполняется $S(\omega)\geq 0$.

Докажем теперь 4.8. Рассмотрим функцию

$$R_T(\tau) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{|\tau|}{2\mathrm{T}}\right)R(\tau), & |\tau|\leq 2\mathrm{T} \\ 0, & |\tau|>2\mathrm{T} \end{cases} .$$

Тогда 4.9 можно записать в виде

$$S_T(\omega) = \int_{-2\mathrm{T}}^{2\mathrm{T}} \left(1+\frac{\tau}{2\mathrm{T}}\right) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau .$$

Итак, используем выражение $S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau$, умножим его слева и справа на $\left(1-\dfrac{|\omega|}{\Omega}\right)e^{i\omega t}$ и проинтегрируем по частоте от $-\Omega$ до Ω :

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) S_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) d\tau \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) e^{-i\omega(\tau-t)} d\omega . \quad (4.10)$$

Рассмотрим в последнем выражении только второй интеграл справа, воспользовавшись формулой Эйлера для экспоненты:

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) e^{-i\omega(\tau-t)} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) \left[\cos(\omega(\tau-t)) - i\sin(\omega(\tau-t))\right] d\omega .$$

Поскольку подынтегральная функция справа в слагаемом с $\sin(\omega(\tau-t))$ нечетная, то интеграл от этого слагаемого равен нулю, а следовательно

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) e^{-i\omega(\tau-t)} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(1-\frac{|\omega|}{\Omega}\right) \cos(\omega(\tau-t)) d\omega =$$

$$= 2\int_0^{\Omega} \cos(\omega(\tau-t))\,d\omega + \frac{2}{\Omega}\int_0^{\Omega} \omega\cos(\omega(\tau-t))\,d\omega = \frac{2}{\tau-t}\sin(\omega(\tau-t))\Bigg|_0^{\Omega} -$$

$$-\frac{2}{\Omega}\,\frac{\omega}{(\tau-t)}\sin(\omega(\tau-t))\Bigg|_0^{\Omega} - \frac{2}{\Omega(\tau-t)^2}\cos(\omega(\tau-t))\Bigg|_0^{\Omega} =$$

(здесь использована формула интегрирования по частям)

$$= \frac{2}{\Omega(\tau-t)^2}\left[1-\cos(\Omega(\tau-t))\right] = \frac{2}{\Omega(\tau-t)^2}\times 2\sin^2\left(\frac{\Omega(\tau-t)}{2}\right) =$$

(здесь использовано тождество $2\sin^2\alpha = 1 - cos2\alpha$)

$$= 2\pi\left\{\frac{\Omega}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{\Omega(\tau-t)}{2}\right)}{\frac{\Omega(\tau-t)}{2}}\right]^2\right\} = 2\pi\Phi(\Omega,\ \tau-t) \ .$$

Выражение в фигурных скобках (или функция Φ) обращается в дельта-функцию $\delta(\tau-t)$ при $\Omega\to\infty$. Следовательно, выражение 4.10 можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\Phi(\Omega,\ \tau-t)R_T(\tau)d\tau \ .$$

Переход к пределу в этом выражении при $\Omega\to\infty$ приводит к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega)e^{i\omega t}d\omega = 2\pi R_T(t) \ ,$$

при переходе к пределу при $T\to\infty$ в котором можно получить следующее:

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} R_T(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} S_T(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad .$$

Таким образом, доказано утверждение 4.8 и закончено доказательство теоремы Винера-Хинчина.

Свойства энергетического спектра $S(\omega)$:

1. $R(0) = M\left[X^2(t)\right] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$.
2. $S(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos(\omega\tau) d\tau$, т.е. энергетический спектр вещественного процесса вещественен.
3. $S(\omega) \geq 0$.
4. $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} S(\omega) = 0$.
5. $S(-\omega) = S(\omega)$, т.е. энергетический спектр есть четная функция частоты.

Формулы теоремы Винера-Хинчина можно перенести на взаимные корреляционную функцию и энергетический спектр:

$$S_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad ,$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad .$$