Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 4.

5. Теорема Винера-Хинчина (Уолда) для дискретных процессов.

Рассмотрим дискретный процесс в форме последовательности $x_i = x(t_i)$, $t_i = 0, \pm T, \pm 2T, \pm 3T, ...$ и ограничимся рассмотрением поначалу интервалом $T_0 = NT$. Введем приведенную частоту $\varpi = \omega T$, это удобно сделать, чтобы рассматривать функции на интервале $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим теперь функцию $f(\varpi)$, периодическую с периодом 2π и удовлетворяющую условиям Дирихле (или попросту с конечной энергией на $[-\pi, \pi]$).

Ряд Фурье этой функции:

$$f(\varpi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\varpi} , \tag{5.1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varpi) e^{in\omega} d\varpi .$$

Равенство Парсеваля для этого случая:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varpi)|^2 d\varpi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .$$

Пусть рассматриваемый дискретный случайный процесс имеет нулевое среднее, т.е.

$$M[x_i] = 0, \quad \forall i$$

и является стационарным в широком смысле с такой корреляционной функцией

$$R(i-j) = M\left[x_i x_j\right] ,$$

что

$$R(0) = M\left[x_i^2\right] = \sigma^2 = const \qquad \forall i \ .$$

Аналогично энергетическому спектру $\hat{x}(\omega)$ для непрерывных с.п. введем функцию

$$f(\overline{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-ik\overline{\omega}}$$

или её приближение с конечным суммированием:

$$f_N(\overline{\omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x_k e^{-ik\overline{\omega}} = \hat{x}_N(\overline{\omega}) \ .$$

Аналогично тому как это было сделано для непрерывных процессов, можно сформировать среднее значение периодограммы $S(\overline{\omega}, N)$:

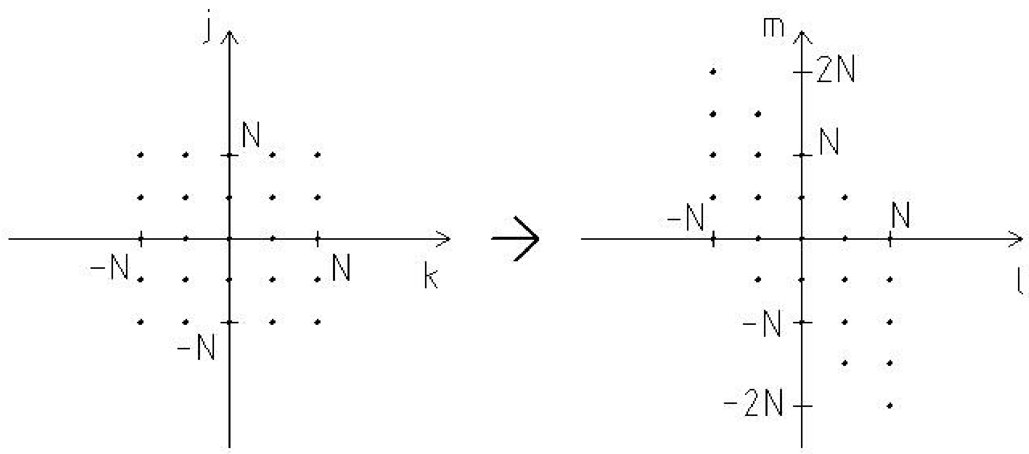
$$S_N(\overline{\omega}) = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} M\left[\hat{x}_N(\overline{\omega})\hat{x}_N^*\right] = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} M\left[|\hat{x}_N(\overline{\omega})|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} M\left[x_j x_k\right] e^{-ij\overline{\omega}} e^{ik\overline{\omega}} = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} R(j-k) e^{-ij\overline{\omega}} e^{ik\overline{\omega}} =$$

По аналогии с заменой переменных в двойных интегралах в доказательствах необходимого и достаточного условия эргодичности по среднему и теоремы Винера-Хинчина, введем новые индексы суммирования $m=j-k$ и $l=k$. Тогда можно продолжить равенство следующим образом:

$$= \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{l=-N}^{N} \sum_{m=-N-l}^{N-l} R(m) e^{-im\overline{\omega}} =$$

Чтобы были понятны дальнейшие выкладки, по аналогии с областями интегрирования в двойных интегралах можно нарисовать множества индексов суммирования для старых и новых индексов:



$$= \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\left[\sum_{m=-2\mathrm{N}}^{0}\sum_{l=-N-m}^{N} R(m)e^{-im\varpi} + \sum_{m=1}^{2\mathrm{N}}\sum_{l=-N}^{N-m} R(m)e^{-im\varpi}\right] =$$

$$= \sum_{m=-2\mathrm{N}}^{0}\left(1+\frac{m}{2\mathrm{N}+1}\right)R(m)e^{-im\varpi} + \sum_{m=1}^{2\mathrm{N}+1}\left(1-\frac{m}{2\mathrm{N}+1}\right)R(m)e^{-im\varpi} =$$

$$= S_N(\varpi) = \sum_{m=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}}\left(1-\frac{|m|}{2\mathrm{N}+1}\right)R(m)e^{-im\varpi} \quad .$$

В пределе при $N \to \infty$ и при выполнении условия $\sum_m |R(m)| < +\infty$ можно записать:

$$S(\varpi) = \lim_{N\to\infty} S_N(\varpi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{-im\varpi} \quad . \qquad (5.2)$$

Таким образом, энергетический спектр дискретного с.п. является рядом Фурье, в котором отсчеты корреляционной функции $R(n)$ являются коэффициентами ряда Фурье 5.1. Получили аналог первой формулы теоремы Винера-Хинчина.

Теперь найдем выражение для коэффициентов ряда Фурье для $R(m)$. Введем функцию

$$R_N(m) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|m|}{2\mathrm{N}+1}\right) R(m), & |m| \le 2\mathrm{N} \\ 0, & |m| > 2\mathrm{N} \end{cases} .$$

Тогда

$$S_N(\overline{\omega}) = \sum_{m=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} R_N(m) e^{-im\overline{\omega}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_N(m) e^{-im\overline{\omega}} .$$

Умножим обе части этого равенства на $\dfrac{1}{2\pi} e^{in\overline{\omega}}$ и проинтегрируем от $-\pi$ до π :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(\overline{\omega}) e^{in\overline{\omega}} d\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_N(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)\overline{\omega}} d\overline{\omega} .$$

Если определить символ Кронекера как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)\overline{\omega}} d\overline{\omega} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \ne n \end{cases} ,$$

то можно записать

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(\overline{\omega}) d\overline{\omega} = R_N(n) .$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получим аналог второй формулы теоремы Винера-Хинчина:

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\overline{\omega}) e^{in\overline{\omega}} d\overline{\omega} .$$

Итак теорема Винера-Хинчина для дискретных с.п. выражается формулами

$$S(\overline{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) e^{-i\overline{\omega} n} \quad , \tag{5.3}$$

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega} n} d\overline{\omega} \quad . \tag{5.4}$$

Свойства энергетического спектра те же, что и для непрерывных с.п.