Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 5

6. Узкополосный случайный процесс

На практике большое значение имеют узкополосные случайные процессы. Например, амплитудно-модулированный или частотно-модулированный радиосигналы (радиовещательные станции) могут рассматриваться как такие с.п. Случайный процесс называется *узкополосным*, если ширина его энергетического спектра много меньше средней частоты спектра.

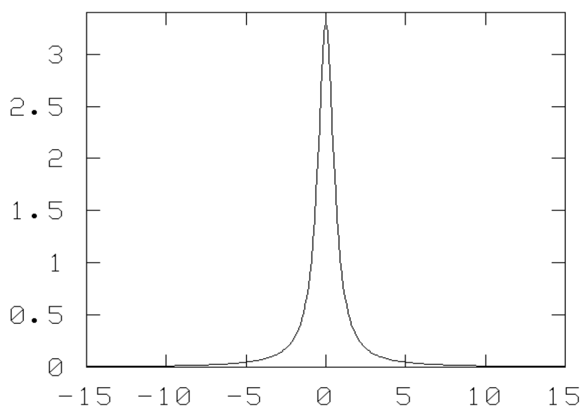
Рассмотрим случайный процесс с корреляционной функцией

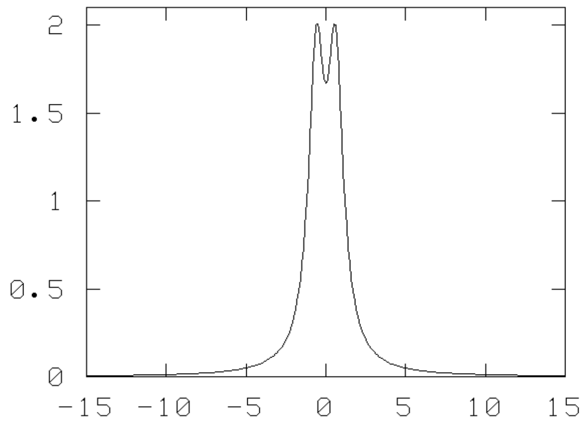
$$R(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\Omega\tau \quad .$$

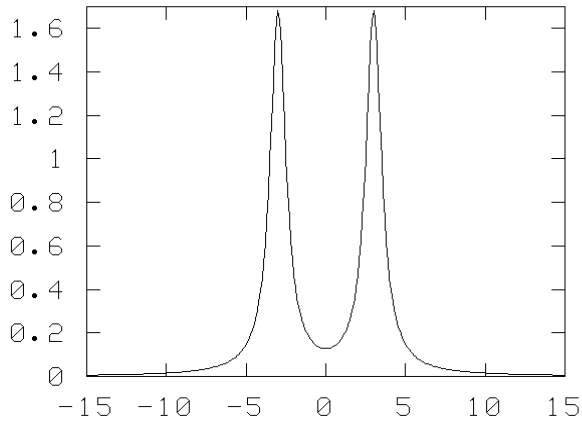
Энергетический спектр этого процесса

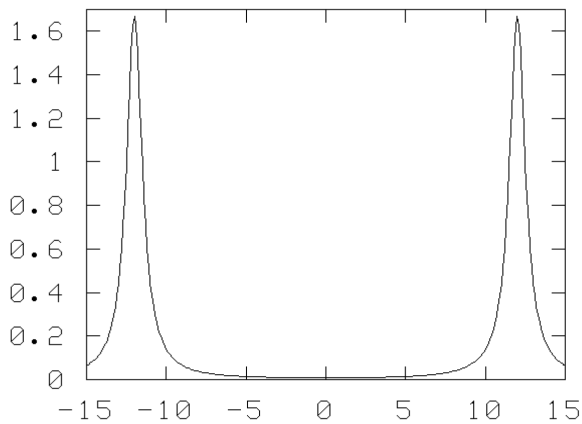
$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\sigma^2\alpha\left[\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\Omega)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\Omega)^2}\right] \quad .$$

Ниже приведена серия графиков $S(\omega)$ для $\sigma^2=1$, $\alpha=0.6$ и $\Omega=0.1\alpha,\ \alpha,\ 5\alpha,\ 20\alpha$. Очевидно, что при выполнении условия $\Omega\gg\alpha$ рассматриваемый процесс можно считать узкополосным.









Таким образом, спектр узкополосного процесса выглядит примерно так как на последнем графике. Реализация узкополосного случайного процесса на осциллографе может выглядеть как синусоида с медленно меняющейся огибающей (амплитудой) и фазой. В этом случае процесс можно представить как

$$X(t) = V(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad , \tag{6.1}$$

где $V(t)$ - огибающая, $\varphi(t)$ - фаза, причем $V(t)$ и $\varphi(t)$ - медленно меняющиеся функции времени по сравнению с $\cos\omega_0 t$.

Процесс (6.1) может быть также записан в виде

$$X(t) = a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t \quad , \tag{6.2}$$

где $a(t)=V(t)\cos\varphi(t)$ и $b(t)=V(t)\sin\varphi(t)$ - низкочастотные случайные процессы (квадратурные компоненты). Их средние значения равны нулю: $M[a(t)]=M[b(t)]=0$. Запишем корреляционную функцию $X(t)$

$$R(t, t+\tau) = M\left[X(t)X(t+\tau)\right] = M\left[XX_\tau\right] =$$

(для сокращения записи опустим аргумент t , а сдвинутую на τ функцию отметим соответствующим нижним индексом)

$$= M\left[(a\cos\omega_0 t - b\sin\omega_0 t)(a_\tau\cos\omega(t+\tau) - b_\tau\sin\omega_0(t+\tau))\right] =$$

$$= M\left[a\,a_\tau\right]\cos\omega_0 t\,\cos\omega_0(t+\tau) + M\left[b\,b_\tau\right]\sin\omega_0 t\,\sin\omega_0(t+\tau) -$$

$$- M\left[a\,b_\tau\right]\cos\omega_0 t\,\sin\omega_0(t+\tau) - M\left[a_\tau b\right]\sin\omega_0 t\,\cos\omega(t+\tau) \quad .$$

Поскольку мы рассматриваем стационарный с.п. $X(t)$, то зависимость от t должна исчезнуть в к.ф. А это приводит к условиям

$$M\left[a\,a_\tau\right] = R_c(\tau) = M\left[b\,b_\tau\right] = R_s(\tau) = \sigma_x^2 p(\tau) \quad ,$$

$$M\left[a\,b_\tau\right] = R_{cs}(\tau) = -M\left[a_\tau b\right] = \sigma_x^2 q(\tau) \quad , \tag{6.3}$$

$$M\left[a^2\right] = M\left[b^2\right] = \sigma_x^2 = M\left[X^2\right] \quad .$$

При этом корреляционная функция примет вид

$$R_x(\tau) = R_c(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{cs}\sin\omega_0\tau = \sigma_x^2\rho_x(\tau) \quad , \tag{6.4}$$

где $\rho_x(\tau)$ - коэффициент корреляции случайного процесса $X(t)$, причем

$$\rho_x(\tau) = p(\tau)\cos\omega_0\tau - q(\tau)\sin\omega_0\tau = r(\tau)\cos[\omega_0\tau + \theta(\tau)] \ , \qquad (6.5)$$

где $r(\tau) = \sqrt{p^2(\tau)+q^2(\tau)}$ и $\theta(\tau) = arctg[q(\tau)/p(\tau)]$.
По теореме Винера-Хинчина

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S_x^+(\omega)\cos\omega t \ d\omega \ ,$$

где использовано свойство четности э.с., введено обозначение $S_x^+(\omega) = 2\mathrm{S}_x(\omega)$ и $\omega \geq 0$. Замена переменных $\Omega = \omega - \omega_0$ в выражении для к.ф. дает

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\left\{\cos\omega_0\tau\int_{-\omega_0}^{\infty} S_x^+(\omega_0+\Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega - \sin\omega_0\tau\int_{-\omega_0}^{\infty} S_x^+(\omega_0+\Omega)\sin\Omega\tau\, d\Omega\right\} \qquad (6.6)$$

Сравнение (6.4) и (6.6) дает следующие равенства:

$$R_c(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty} S_x^+(\omega_0+\Omega)\cos\Omega\tau \ d\Omega \ , \qquad (6.7)$$

$$R_{cs}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty} S_x^+(\omega_0+\Omega)\sin\Omega\tau \ d\Omega \ . \qquad (6.8)$$

По (6.8) видно, что функция $R_{cs}(\tau)$ (а стало быть и $q(\tau)$) является нечетной функцией, т.е.

$$R_{cs}(-\tau) = -R_{cs}(\tau) \quad \text{или} \quad q(-\tau) = -q(\tau) \ . \qquad (6.9)$$

Отсюда ясно, что

$$R_{cs}(0) = M\left[ab\right] = 0 \ . \qquad (6.10)$$

Это означает, что квадратурные компоненты в совпадающие моменты времени ортогональны (некоррелированы), что объясняет их название.

Допустим, что э.с. $S_x^+(\omega)$ симметричен относительно частоты ω_0, т.е. выполняется равенство $S_x^+(\omega_0-\Omega)=S_x^+(\omega_0+\Omega)$. Тогда для узкополосного процесса $R_{cs}(\tau)=0$ для всех τ, а это означает, что при симметричном энергетическом спектре

$$R_x(\tau)=R_c(\tau)\cos\omega_0\tau=\sigma_x^2 p(\tau)\cos\omega_0\tau \quad . \tag{6.11}$$

Рассмотрим преобразование Фурье от (6.11):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_c(\tau)\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R_c(\tau)e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R_c(\tau)e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\left[S_c(\omega-\omega_0)+S_c(\omega+\omega_0)\right], \end{aligned} \tag{6.12}$$

где $S_c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_c(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$. Между делом можно отметить, что умножение некоторой низкочастотной функции $f(t)$ на $\cos\omega_0 t$ приводит к тому, что в радиотехнике называется *гетеродинированием* спектра на частоты $\pm\omega_0$.

Иногда удобно использовать комплексную форму записи узкополосного сигнала и рассматривать случайный процесс в виде

$$X(t)=\Re\left[A(t)e^{i\omega t}\right] \ ,$$

где $A(t)=V(t)e^{i\varphi(t)}$ - комплексная огибающая узкополосного с.п., а $\Re$ означает действительную часть числа.

Квадратурные компоненты $a(t)$ и $b(t)$ некоррелированые величины. Пусть, кроме того, они являются гауссовыми и имеют совместную плотность распределения вероятности

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad ; \quad x_1 = a(t) \quad ; \quad x_2 = b(t) \quad . \tag{6.13}$$

Найдем как будут распределены при этом огибающая $V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ узкополосного гауссовского случайного процесса. Выразим случайные величины X_1 и X_2 через амплитуду и фазу:

$$X_1 = V_t \cos\varphi_t; \qquad X_2 = V_t \sin\varphi_t \quad . \tag{6.14}$$

Отсюда можно найти обратные зависимости:

$$V_t = \sqrt{X_1^2+X_2^2} = f_1(X_1, X_2); \qquad \varphi_t = arctg\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = f_2(X_1, X_2) \quad .$$

Якобиан преобразования при этом

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial V} & \dfrac{\partial f_2}{\partial V} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -V sin\,\varphi & V cos\,\varphi \end{vmatrix} = V \quad . \tag{6.15}$$

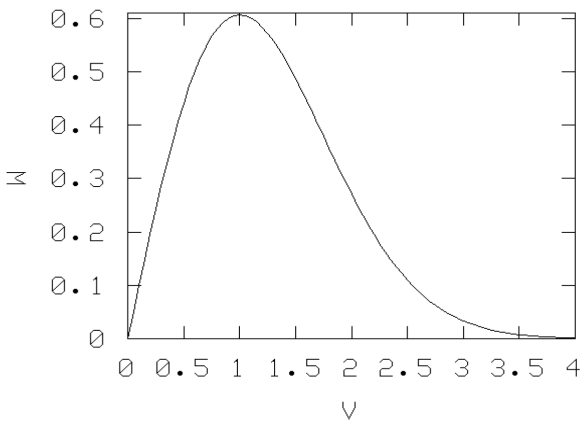
Тогда совместная п.р.в. $W(V, \varphi) = W\left(x_1 = f_1(V, \varphi),\ x_2 = f_2(V, \varphi)\right)|\boldsymbol{J}|$. Поэтому

$$W(V, \varphi) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{V}{2\pi\sigma^2}\right)\exp\left(-\dfrac{V^2}{2\sigma^2}\right), & V \geq 0,\ \varphi \in [0\,;\,2\pi) \\ 0, & V < 0,\ \varphi \notin [0\,;\,2\pi) \end{cases} \quad .$$

Отсюда

$$W(V) = \int_0^{2\pi} W(V, \varphi)\, d\varphi = \begin{cases} (V/\alpha^2)\exp(-V^2/2\alpha^2), & V \geq 0 \\ 0, & V < 0 \end{cases} \quad , \tag{6.16}$$

где $\alpha = \sigma$. Эта п.р.в. называется распределением Рэлея и имеет вид показанный на рисунке ниже.



Аналогично находим

$$W(\varphi) = \int_0^\infty W(V,\varphi)dV = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \varphi < 2\pi; \\ 0, & \text{при других } \varphi. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Таким образом получили, что фаза гауссовского узкополосного случайного процесса распределена равномерно. В процессе вывод попутно выяснилось, что

$$W(V,\varphi) = W(V)W(\varphi) \ ,$$

что означает что огибающая и фаза независимы в совпадающие моменты времени.