Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 6

7. Марковские* случайные процессы и марковские цепи.

*Марков Андрей Андреевич (род. 1890) – русский математик, академик

Марковский случайный процесс характеризуется тем, что его условная плотность распределения вероятностей имеет вид

$$W(x(t_n)\,|\,x(t_1),x(t_2)\ldots,x(t_{n-1})) \;=\; W(x(t_n)\,|\,x(t_{n-1})) \quad . \qquad (7.1)$$

Можно сказать, что марковские процессы (последовательности) являются процессами без последействия. Учитывая это свойство, любой конечномерный закон распределения марковского процесса выражается через его двумерный закон распределения, то есть

$$W(x_1,x_2,\ldots,x_n) = W(x_n|x_{n-1})\,W(x_{n-1}|x_{n-2})\;\ldots\;W(x_2|x_1)\,W(x_1) \quad . \qquad (7.2)$$

Таким образом для м.с.п. при известном начальном распределении $W(x_1)$ и *переходных* п.р.в. $W(x_i|x_{i-1})$ можно найти п.р.в. любой конечной размерности.

Переходные п.р.в. удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена

$$W(x_3|x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x_3|x_2)\,W(x_2|x_1)\,dx_2, \qquad t_1<t_2<t_3 \quad .$$

Если назвать сечение $x_i=x(t_i)$ настоящим сечением с.п., сечения $x_{i-1}=x(t_{i-1})$ и $x_{i+1}=x(t_{i+1})$ прошлым и будущим сечениями соответственно, то можно сказать, что с.п. называется марковским если его будущее значение зависит только от настоящего и не зависит от прошлого значения.

Можно дать определение марковского процесса через условную одномерную функцию распределения $F(Y\,|\,X)=F(X,Y)/F(X)$, которую в теории марковских процессов принято рассматривать как функцию четырех аргументов t,x,τ,y , где x и y это значения процесса в моменты t и τ соответственно, причем $t<\tau$. Итак, для марковского процесса условная функция распределения (она же *переходная функция*)

$$F(t,x;\tau,y) = P\{X(\tau)<y \mid X(t)=x\} = \\ = P\{X(\tau)<y \mid X(t_1)=x_1,\dots,X(t_n)=x_n, X(t)=x\} \quad , \tag{7.3}$$

не изменяется от дополнительного знания значений процесса в более ранние моменты времени, чем t, то есть для всех $t_1<t_2<\dots<t_n<t<\tau$.

Марковским процессом с непрерывным множеством значений называется марковский процесс, для которого существует производная по y от переходной функции

$$f(t,x;\tau,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(t,x;\tau,y) \quad ,$$

называемая *плотностью вероятности перехода*, или просто *переходной плотностью*. Последняя является условной п.р.в.

$$f(t,x;\tau,y) = W(y(\tau) \mid x(t)) \quad . \tag{7.4}$$

Переходная плотность удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чепмена

$$f(t,x;\tau,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,z;\tau,y) f(t,x;s,z)\,dz, \qquad t<s<\tau \quad . \tag{7.5}$$

Марковский с.п. называется *однородным* (*стационарным*) *по времени*, если переходная функция $F(t,x;\tau,y)$ при любых x и y зависит только от разности $t-\tau$. Марковский с.п. называется *аддитивным* или *процессом с независимыми приращениями,* если марковские переходные функции $F(t,x;\tau,y)$ при любых t и τ зависят только от разности $x-y$. В этом случае разность $X(\tau)-X(t)$ не зависит от $X(u)$ при $u<t$.

Марковский с.п. является эргодическим когда его предельная функция распределения $\lim\limits_{t\to\infty} P\{X(t)\le y \mid X(0)=x\}$ существует и не зависит от x. В этом случае $\lim\limits_{t\leftarrow\infty} P\{X(t)\le y\}$ также существует независимо от начального распределения и совпадает с предыдущим пределом.

Переходная плотность $f(t,x;\tau,y)$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau,y)f] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau,y)f] = 0 \quad ; \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\, b(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad . \qquad (7.7)$$

Эти уравнения называются прямым и обратным уравнениями Колмогорова.

Марковские цепи

Марковские цепи – это подкласс марковских случайных процессов с дискретным множеством значений и дискретным временем. По признаку дискретности выделяют 4 разновидности м.с.п.:

1. *марковские цепи* (м.ц.) - процесс дискретный по мгновенному значению и по времени;
2. *марковские цепи с непрерывным временем* (область значений – дискретное множество, область определения – непрерывная), другое название - *дискретные м.с.п.*;
3. *марковские последовательности* (область значений – непрерывное множество, область определения дискретная);
4. непрерывнозначный м.с.п. (и область значений и область определения – непрерывные множества).

Дадим несколько определений касающихся марковских цепей.

Случайная последовательность $\{X_n\};\ n=0,1,2,\ldots$ называется *конечной цепью Маркова*, если:

1. в каждый момент времени $n=0,1,2,\ldots$ случайная величина X_n является дискретной случайной величиной с дискретным множеством значений $S=\{0,1,\ldots,l\},\ l<+\infty$;
2. выполняется марковское свойство, что означает, что для всех $n\geq 0$ и $k_n\in S$ справедливо равенство
$$P\{X_n=k_n \mid X_{n-1}=k_{n-1}, X_{n-2}=k_{n-2}, \ldots, X_1=k_1\} = P\{X_n=k_n \mid X_{n-1}=k_{n-1}\} \quad . \qquad (7.8)$$

Множество $S=\{0,1,\ldots,l\}$ называется *множеством состояний конечной цепи Маркова*. Говорят, что цепь $\{X_n\}$ в момент n находится в состоянии k , если произошло событие $X_n=k$.

Марковское свойство цепи означает еще и то, что закон распределения случайной величины X_n при условии, что $X_{n-1}=k$, $k\in S$, не зависит от того каким образом цепь попала в состояние k в момент времени $n-1$. Марковским свойством обладают многие с.п. встречающиеся в функционировании радиотехнических (и не только) систем.

Помимо конечных цепей Маркова, можно рассматривать и цепи Маркова со счетным множеством состояний ($l=+\infty$).

Вероятность

$$p_{kj}(n) = P\left\{X_n=j \,\middle|\, X_{n-1}=k\right\}, \quad k\,,j\in S \;, \tag{7.9}$$

того, что цепь в момент $n\geq 1$ окажется в состоянии j при условии, что в предыдущий момент времени она была в состоянии k , называется *вероятностью перехода* из состояния k в состояние j . Матрица $\boldsymbol{P}(n)$ состоящая из элементов $p_{kj}(n),\; k\,,j\in S$ называется переходной матрицей цепи $\left\{X_n\right\}$, причем

$$\sum_{j=0}^{l} p_{kj}(n) = 1 \;, \tag{7.10}$$

то есть суммы элементов строк равны единице, что означает, что из состояния k цепь обязательно перейдет в одно из возможных состояний $j\in S$.

Вероятность

$$\pi_k(n) = P\left\{X_n=k\right\}, \quad k\in S \tag{7.11}$$

того, что в момент времени n цепь $\left\{X_n\right\}$ окажется в состоянии k , называется вероятностью *k*-го состояния цепи в момент *n*. А вектор $\boldsymbol{\pi}(n) = \left(\pi_0(n),\dots,\pi_l(n)\right)^T$ является распределением вероятностей состояний цепи $\left\{X_n\right\}$ в момент *n* или вероятностным вектором. Естественно, выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{l} \pi_k(n) = 1 \;, \tag{7.12}$$

что означает, что в каждый момент времени цепь находится в одном из своих допустимых состояний.

Поскольку эволюция цепи описывается вероятностями перехода, то естественно ввести более общую вероятность перехода, а именно вероятность перехода за $m-n$ шагов:

$$p_{ij}(n,m) = P\left\{X_m=j \,\middle|\, X_n=i\right\} \;. \tag{7.13}$$

По теореме умножения вероятностей

$$P\{X_m=j\,;X_n=i\} = P\{X_n=i\}P\{X_m=j \mid X_n=i\} = \pi_i(n)\,p_{ij}(n,m) \quad . \tag{7.14}$$

Если просуммировать (7.14) слева и справа по i, то получим

$$\pi_j(m) = \sum_{i=0}^{l} p_{ij}(n,m)\pi_i(n) \quad . \tag{7.15}$$

Очевидно, что если рассматривать переход системы из состояния i в момент времени n в состояние j в момент времени m через все возможные промежуточные состояния $r \in S$ в промежуточный момент времени k, такой что $n<k<m$, то можно записать, что

$$p_{ij}(n,m) = \sum_{r=0}^{l} p_{ir}(n,k)\,p_{rj}(k,m) \quad . \tag{7.16}$$

Уравнения (7.15) и (7.16) называют уравнениями Маркова, а (7.16) кроме того называют дискретной формой уравнения Колмогорова-Чепмена. Уравнения Маркова удобно записывать в матричной форме. В матричном виде (7.15) можно записать как

$$\boldsymbol{\pi}(m) = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}(n,m)\,\boldsymbol{\pi}(n) \tag{7.17}$$

или

$$\boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{T}}(m) = \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{T}}(n)\,\boldsymbol{P}(n,m) \quad . \tag{7.18}$$

Второе уравнение Маркова (7.16) в матричной форме имеет вид

$$\boldsymbol{P}(n,m)=\boldsymbol{P}(n,k)\boldsymbol{P}(k,m) \quad . \tag{7.20}$$

Цепь Маркова называется *однородной*, если $\boldsymbol{P}(n)=\boldsymbol{P}=const$ при всех $n \ge 1$.

Если цепь Маркова однородная, то переходные вероятности $p_{ij}(n,m)$ зависят только от разности $\mu=m-n$ и поэтому можно записать

$$p_{ij}(\mu)=P\{X_{n+\mu}=j \mid X_n=i\} = P\{X_{1+\mu} \mid X_1=i\} \quad .$$

[Здесь греческие буквы в качестве аргумента помогут отличать матрицу перехода в μ шагов от матрицы перехода в один шаг, определенной в (7.9)]

Если обозначить $\nu=m-k,\ \eta=k-n$, то для однородной цепи Маркова (7.20) можно записать в виде

$$\boldsymbol{P}(\nu+\eta) = \boldsymbol{P}(\eta)\boldsymbol{P}(\nu) \quad . \tag{7.21}$$

Полагая $\nu=1$ можно получить рекуррентное соотношение

$$\boldsymbol{P}(\eta+1) = \boldsymbol{P}(\eta)\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{P}(\eta)\boldsymbol{P} \quad , \tag{7.22}$$

где $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(1)$ переходная матрица за один шаг. Из (7.22) следует, что

$$\boldsymbol{P}(2) = \boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}^2(1) = \boldsymbol{P}^2$$
$$\boldsymbol{P}(3) = \boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}^2(1)\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}^3(1) = \boldsymbol{P}^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{P}(\eta) = \boldsymbol{P}(\eta-1)\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}^\eta(1) = \boldsymbol{P}^\eta$$

То есть матрица переходных вероятностей за η шагов принимает вид

$$\boldsymbol{P}(\eta) = \boldsymbol{P}^\eta \quad . \tag{7.23}$$

Если матрица $\boldsymbol{P}(\eta)$ не зависит от η , то такая однородная цепь Маркова называется *стационарной* и в этом случае $\boldsymbol{P}(\eta)=\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{P}$.

Если воспользоваться выражением (7.18) (первое уравнение Маркова в матричном виде для вектора вероятностей в виде строки), то для однородной цепи можно получить

$$\boldsymbol{\pi}^T(m) = \boldsymbol{\pi}^T(n)\boldsymbol{P}(m-n) = \boldsymbol{\pi}^T(0)\boldsymbol{P}(m-0) = \boldsymbol{\pi}^T(0)\boldsymbol{P}^m \quad . \tag{7.24}$$

Если процесс стационарен, то $\boldsymbol{P}^m=\boldsymbol{P}$, тогда можно записать, что

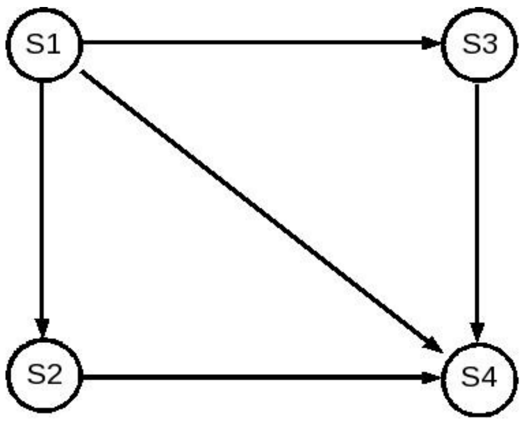
$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi} \quad , \tag{7.25}$$

что означает, что вектор $\boldsymbol{\pi}^T$ является левым собственным вектором матрицы $\boldsymbol{P}$ соответствующим ее собственному значению равному единице. Соответственно вектор $\boldsymbol{\pi}$ является правым собственным вектором матрицы $\boldsymbol{P}^T$ соответствующим собственному значению равному единице, так как в стационарном случае

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi} \quad . \tag{7.26}$$

Если величина $\boldsymbol{P}^n$ имеет предел при $n \to \infty$, тогда цепь Маркова *асимптотически стационарна*.

Рассмотрим простую техническую систему состоящую из двух узлов, которая может быть полностью работоспособна, может отказать один из узлов или откажут оба узла и система окажется полностью неработоспособна. Ниже показана марковская цепь состоящая из четырех событий:



1. s_1 — система исправна;
2. s_2 — первый узел отказал;
3. s_3 — второй узел отказал;
4. s_4 — оба узла отказали.

Состояние s_4, из которого уже невозможны переходы в другие состояния называется *поглощающим* или *концевым*. Если система моожет перейти из состояния s_i в s_j, то такие состояния *соседние*. Если в некоторое состояние нельзя попасть, то оно *изолированное*.

Вектор $\boldsymbol{\pi}(\infty)$ называется *вектором финальных вероятностей* цепи Маркова при заданном $\boldsymbol{\pi}(0)$, если существует предел

$$\pi_k(\infty) = \lim_{n \to \infty} \pi_k(n), \quad k=0,1,\dots,l \; .$$

Если $\boldsymbol{\pi}(\infty)$ не зависит от $\boldsymbol{\pi}(0)$, то $\boldsymbol{\pi}(\infty)$ это *стационарное распределение* марковской цепи.

Однородная марковская цепь называется *эргодической*, если вектор финальных вероятностей $\boldsymbol{\pi}(\infty)$ существует для каждого $\boldsymbol{\pi}(0)$ и не зависит от $\boldsymbol{\pi}(0)$.