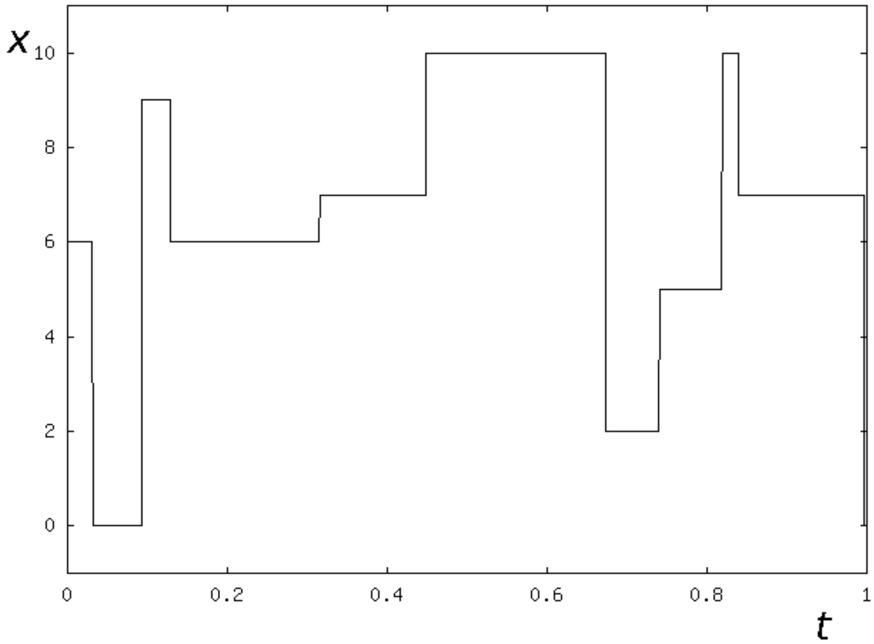
Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 7

8.Марковские цепи с непрерывным временем

Марковские цепи с непрерывным временем представляют собой марковский случайный процесс $X(t)$, состоящий из семейства функций лестничного типа с разрывами в случайных точках t_n. На рисунке ниже приведен пример такого процесса.



Марковская цепь с непрерывным временем имеет дискретный набор состояний $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Значения $q_n = X(t_n^+)$ процесса $X(t)$ образуют марковскую цепь вложенную в случайный процесс $X(t)$. Таким образом марковская цепь $\{q_n\}$ и точечный процесс $\{t_n\}$ задают марковскую цепь с непрерывным временем. Обозначим вероятности состояний

$$\pi_i(t) = P\{X(t) = a_i\} \tag{8.1}$$

и переходные вероятности

$$p_{ij}(t_1, t_2) = P\{X(t_2) = a_j \mid X(t_1) = a_i\} \quad . \tag{8.2}$$

Эти величины обладают следующими свойствами:

$$\sum_{j=1}^{l} p_{ij}=1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{l} \pi_i(t_1)\, p_{ij}(t_1,t_2) = \pi_j(t_2) \quad . \tag{8.3}$$

Кроме того, переходные вероятности удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена

$$p_{ij} = \sum_r p_{ir}(t_1,t_2)\, p_{rj}(t_2,t_3); \quad t_1<t_2<t_3 \quad . \tag{8.4}$$

В случае однородного марковского случайного процесса $X(t)$ переходные вероятности зависят только от разности $\tau=t_2-t_1$, т.е. можно записать

$$p_{ij}(\tau) = P\{X(t+\tau)=a_j \,|\, X(t)=a_i\} \quad . \tag{8.5}$$

Тогда уравнение Колмогорова-Чепмена (8.4) можно записать в следующем виде:

$$p_{ij}(t_3-t_1) = \sum_r p_{ir}(t_2-t_1)\, p_{rj}(t_3-t_2) \quad .$$

Если положить $\tau=t_2-t_1$ и $\alpha=t_3-t_2$, то уравнение Колмогорова-Чепмена для однородной марковской цепи с непрерывным временем примет вид:

$$p_{ij}(\tau+\alpha) = \sum_r p_{ir}(\tau)\, p_{rj}(\alpha) \quad . \tag{8.6}$$

По сути это $l\times l$ уравнений, поэтому в матричном виде эти уравнения можно записать как

$$\boldsymbol{P}(\tau+\alpha) = \boldsymbol{P}(\tau)\,\boldsymbol{P}(\alpha) \quad . \tag{8.7}$$

При дискретном времени матрица переходных вероятностей может быть определена через одношаговую (см. (7.22) в предыдущей лекции). В случае же непрерывного времени можно показать, что $\boldsymbol{P}(\tau)$ для однородной марковской цепи с непрерывным временем удовлетворяет дифференциальному уравнению и может быть выражена через матрицу

$$\boldsymbol{P}'(0^+) = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1l} \\ \lambda_{21} & \dots & \lambda_{2l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{l1} & \dots & \lambda_{ll} \end{pmatrix} \quad .$$

Эта матрица называется *инфинитезимальной (локальной) характеристикой (генератором)* марковской цепи с непрерывным временем. Элементами Λ являются производные справа от элементов матрицы переходных вероятностей, то есть $\lambda_{ij} = p_{ij}'(0^+)$. Эти производные известны как скорости (интенсивности) изменения вероятности перехода марковского случайного процесса $X(t)$.

Поскольку очевидны следующие соотношения

$$\sum_j p_{ij}(\tau) = 1 \quad \text{и} \quad p_{ij}(0) = \delta(i-j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}, \tag{8.8}$$

то $\sum_j \lambda_{ij} = 0$. Обозначив $\lambda_{ii} = -\mu_i$ можно записать $\sum_j \lambda_{ij} = -\mu_i + \sum_{j, j\neq i} \lambda_{ij} = 0$, а следовательно

$$\mu_i = \sum_{j, j\neq i} \lambda_{ij} \geq 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad \text{при} \quad i \neq j . \tag{8.9}$$

Неравенства в (8.9) ясны из (8.8), поскольку если вероятность в какой-то момент равна 1, то больше увеличиваться она не может, а это значит, что производная в этой точке не положительна. А если вероятность в какой-то точке равна 0, то еще уменьшиться она не может, а это значит, что производная в этой точке неотрицательна. Во всех предыдущих рассуждениях предполагается, что $p_{ij}(\tau)$ дифференцируемая справа функция в точке $\tau = 0^+$, то есть, в интервале $(t, t+\Delta t)$ имеет только одну точку разрыва. Для такой функции можно записать

$$P\{X(t+\Delta t) = a_j \mid X(t) = a_i\} = \begin{cases} 1-\mu\Delta t, & i=j \\ \lambda\Delta t, & i\neq j \end{cases} . \tag{8.10}$$

Свойство (8.10) называется свойством ординарности.

Дифференцируя уравнение (8.7) по α и полагая $\alpha = 0$, можно получить дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{P}'(\tau) = \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{\Lambda} \tag{8.11a}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I} , \tag{8.11b}$$

где $\boldsymbol{I}$ - единичная матрица. В скалярной форме (8.11) это система дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{\partial \tau} p_{ij} = \sum_k \lambda_{kj} p_{ik}, \quad i, j=1,2,\ldots,l \quad . \tag{8.12}$$

Это система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и начальным условием (8.11b). Решение системы (8.11a) или (8.12) имеет вид:

$$\boldsymbol{P}(\tau) = e^{\boldsymbol{\Lambda}\tau} \quad . \tag{8.13}$$

В (8.13) используется матричная экспонента, которая определяется для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ через ряд $e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k$, и обладает некоторыми свойствами, среди которых отметим два из них: $e^{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{0}$ - квадратная матрица из нулей и $e^{\boldsymbol{A}} e^{-\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}$. Таким образом, матрица перехода $\boldsymbol{P}(\tau)$ выражается через матрицу переходных скоростей $\boldsymbol{\Lambda}$ (или инфинитезимальную характеристику).

Вероятности состояний $\pi_i(t)$ также удовлетворяют подобной системе дифференциальных уравнений. Обозначим $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\pi}^T$, то есть заменим вектор столбец на вектор строку. Тогда второе выражение из (8.3) можно записать в виде

$$\boldsymbol{p}(t+\tau) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{P}(\tau) \quad . \tag{8.14}$$

Дифференцируя (8.14) по τ и полагая $\tau=0$, получим

$$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{\Lambda} \quad . \tag{8.15}$$

Формальное решение этого уравнения

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \quad . \tag{8.16}$$

Таким образом, вероятности состояний выражаются через начальное распределение и матрицу переходных скоростей.

9. Непрерывные марковские процессы

Марковские случайные процессы в радиотехнике часто используются для анализа как линейных, так и нелинейных устройств в стационарном и переходных режимах. Рассмотрим для начала м.с.п. непрерывный по мгновенным значениям и дискретный по времени, то есть марковскую последовательность (3-ий процесс в нашей классификации).

Отсчет $X_i = X(t_i)$ назовем настоящим значением м.с.п., $X_{i-1} = X(t_{i-1})$ - прошлым и $X_{i+1} = X(t_{i+1})$ - будущим значениями м.с.п. Марковский процесс обладает следующим свойством плотности распределения вероятности:

$$W\left(x_n \,\middle|\, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1\right) = W\left(x_n \,\middle|\, x_{n-1}\right) \quad , \tag{9.1}$$

т. е. его п.р.в. настоящего зависит только от предыдущего значения. Для совместной п.р.в. выполняется

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W(x_n \mid x_{n-1}) W(x_{n-1} \mid x_{n-2}) \ldots W(x_2 \mid x_1) W(x_1) \quad . \tag{9.2}$$

Введем и для марковской последовательности переходную п.р.в.

$$p(x_n, x_{n-1}) = W(x_n \mid x_{n-1}) \quad . \tag{9.3}$$

Тогда совместная п.р.в. (9.2) может быть записана в виде

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_n, x_{n-1}) p(x_{n-1}, x_{n-2}) \ldots p(x_2, x_1) W(x_1) \quad . \tag{9.4}$$

Отметим, что марковская последовательность может также характеризоваться как и марковская цепь переходной вероятностью. Или можно сказать, что условная вероятность (9.1) может трактоваться как переходная вероятность.

Рассмотрим теперь непрерывный марковский процесс с непрерывным временем. Такой процесс определяется одномерной п.р.в.

$$W(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}, \qquad F(x, t) = P\{X(t) \le x\} \tag{9.5}$$

и переходной п.р.в.

$$\pi(x, x_0; t, t_0) = W(X(t) = x \mid X(t_0) = x_0), \quad t > t_0 \quad .$$

Эти функции таковы, что для них выполняются следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = 1 \quad , \tag{9.6}$$

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0) \pi(x, x_0, t, t_0) dx_0 \quad , \tag{9.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x, x_1, t, t_0) = 1 \quad , \tag{9.8}$$

$$\pi(x, x_0, t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x, x_{1,} t, t_1) \pi(x_1, x_0, t_1, t_0) dt_1 \quad . \tag{9.9}$$

Эволюция плотности вероятности перехода для непрерывного м.с.п. с непрерывным временем описывается уравнением

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = L[\pi] \quad , \tag{9.10}$$

где L - некоторый линейный оператор. Вид начальных и граничных условий может быть различным в зависимости от задачи.

Векторный n-мерный процесс описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) + \boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{X}) \tag{9.11}$$

с начальным условием $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X_0}$. $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X})$ - n-мерная неслучайная функция, $\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{X})$ - n-мерный с.п. с произвольными вероятностными характеристиками. Уравнение (9.11) часто записывают в дифференциалах:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) dt + d(t, \boldsymbol{X}) \quad , \tag{9.12}$$

где второе слагаемое справа это дифференциал связанный с $\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{X})$. Отсюда можно заметить, что решение (9.11) или (9.12) будет марковским случайным процессом, если $\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{X})$ это производная процесса с независимыми приращениями (т.е. если для каждого $t\colon\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $X(t_1),\ X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2), \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы).

Воспользуемся обозначением для переходной п.р.в. $W(y, \tau \mid x, t)$, тогда (9.10) можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = L_1 W(y, \tau \mid x, t) \quad . \tag{9.13}$$

Это первое уравнение Колмогорова, а второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L W(y, \tau \mid x, t) \quad , \tag{9.14}$$

где L - оператор сопряженный L_1. Более конкретный вид этих уравнений для скалярного процесса был приведен в предыдущей лекции (см. (7.6) и (7.7)). В случае векторного процесса эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\boldsymbol{X})\frac{\partial W}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}b_{km}(t,\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial x_m}=0 \qquad (9.15)$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_k(\tau,\boldsymbol{Y})W\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_m}\left(b_{km}(\tau,\boldsymbol{Y})W\right)=0 \quad . \qquad (9.16)$$

В случае рассмотрения процесса диффузии, вектор $\boldsymbol{a}$ называется вектором сноса, а матрица $\boldsymbol{b}$ - матрицей диффузии. Уравнение (9.16) называют также уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка, поскольку оно встречалось в работах М.К.Планка, А.Д.Фоккера и других физиков еще до того, как его обосновал А.Н.Колмогоров.

10. Пуассоновские процессы, потоки событий.

Во многих инженерных приложениях возникает задача о распределении потока случайных событий во времени. Обычный для физики пример это дробовой шум в электровакуумных приборах. Пусть $P_n(\tau)=P(n,\tau)$ это вероятность того, что в интервале времени длиной τ происходит n событий. Событиями могут быть вылет электрона из катода радиолампы, вызовы на телефонной станции, заказы в интернет-магазине и т.п. В общем случае поток это последовательность однородных событий следующих одно за другим в случайные моменты времени. Если случайное событие ассоциируется со случайно расположенной на временной оси точкой, то такой процесс (поток) называется *точечным*.

На потоки событий накладываются ограничения, по которым их классифицируют. Рассмотрим только *простейший пуассоновский поток*. Пусть $X(t_0,t)$ это число событий на (t_0,t) - случайная величина, принимающая значения $0,1,2,\ldots,k$ с вероятностью $P\{X(t_0,t)=k\}=P_k(t_0,t)$. Обычно решают две задачи:

а) нахождения $F(t)$, функции распределения длительностей промежутков времени между двумя событиями и

б) распределения $P_k(t_0,t)$ при трех следующих условиях:

1) условия независимости, т.е. для каждого $t_1<t_2<\ldots<t_n$ случайные величины $X(t_i,t_{i+1})$ независимы;
2) условие однородности (стационарности) потока. Это означает, что $P_k(t_0,t)$ не зависят от выбора момента t_0. С.п. X_t однороден во

времени, если случайные величины $(X_{t_2}-X_{t_1})$ и $(X_{t_2+s}-X_{t_1+s})$ одинаково распределены. За достаточно малый промежуток времени $(t,t+\Delta t)$ с вероятностью $a\Delta t+o(\Delta t)$ появляется только одно событие из потока, т.е. $P\{X(t,t+\Delta t)=1\} = a\Delta t+o(\Delta t)$, где $o(\Delta t)$ - величина меньшего порядка малости чем Δt, $a=const$ - параметр пуассоновского процесса (потока).

3) Условие ординарности, т.е. $P\{X(t,t+\Delta t)\geq 2\}=o(\Delta t)$, что означает, что события появляются в пуассоновском потоке одно за другим.

Условие 1) означает, что поток без последействия или процесс с незаисимыми приращениями. Вероятность того, что за малый промежуток Δt не произойдет ни одного события

$$P_0=P\{X(t,t+\Delta t)=0\} = 1-a\Delta t+o(\Delta t) \quad .$$

Решим задачу а). Пусть τ это промежуток времени между событиями, тогда

$$F(t)=P\{\tau<t\} \quad .$$

Рассмотрим функцию

$$R(t)=1-F(t)=P\{\tau>t\} \quad .$$

Событие $\tau>t$ эквивалентно отсутствию события за промежуток t. Используя условия 1) и 2) можно записать

$$P\{\tau>t+\Delta t\}=P\{\tau>t\}\,P\{X(t,t+\Delta t)=0\}$$

или

$$R(t+\Delta t)=R(t)P_0 = R(t)[1-a\Delta t+o(\Delta t)]$$

При $\Delta t\to 0$ можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dt}=-aR \quad , \qquad (10.1)$$

решение которого $R(t)=R(0)e^{-at}=e^{-at}$, так как $R(0)=P\{\tau>0\}=1$. Тогда $F(t)=1-e^{-at},\ \ t\geq 0$. Отсюда беря производную, можно получить выражение для пуассоновской п.р.в.:

$$W(t)=ae^{-at}, \quad t\geq 0 \quad . \qquad (10.2)$$

Теорема. Для пуассоновского потока (для которого выполняются условия 1)-3))

$$p_n(t,t+\tau) = P\{X(t,t+\tau)=n\} = \frac{(a\tau)^n}{n!}e^{-a\tau} , \qquad (10.3)$$

где $a=const$.

Доказательство

Из условий независимости и однородности следует, что

$$P_0(t+s) = P_0(0,t+s) = P_0(0,t)P_0(t,t+s) = P_0(0,t)P_0(0,s) = P_0(t)P_0(s) , \qquad (10.4)$$

где $p_0(t)$ - вероятность того, что на интервале $(0,t)$ не произойдет ни одного события. Нетривиальным решением уравнения $P_0(t+s)=P_0(t)P_0(s)$, при том что $0<P_0(t)\le 1$, является

$$P_0(t) = e^{-at}, \quad a>0 .$$

Для малых t можно записать

$$P_0(t) = 1 - a\,t + o(t) \approx 1$$

и

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = a\,t + o(t)$$

Найдем вероятность $P_n(\tau+\Delta\tau)$ для $n\ge 1$. Если разбить интервал $(0,\, \tau+\Delta\tau)$ на подынтервалы длиной $\Delta\tau$, то в случае достаточной малости $\Delta\tau$ на каждом подынтервале либо происходить одно событие, либо ни одного. Тогда по теореме сложения вероятностей

$$\begin{gathered} P_n(\tau+\Delta\tau) = P\{n-1 \text{ событие на } (0,\tau) \,|\, 1 \text{ событие на } (\tau,\tau+\Delta\tau)\} + \\ + P\{n \text{ событий на } (0,\tau) \,|\, 0 \text{ событий на } (\tau,\tau+\Delta\tau)\} \end{gathered} .$$

Используя условие независимости, можно записать

$$P_n(\tau+\Delta\tau) = P_{n-1}(\tau)P_1(\Delta\tau) + P_n(\tau)P_0(\Delta\tau) .$$

Подставив сюда $P_1(\Delta\tau) = a\Delta\tau$ и $P_0(\Delta\tau) = 1-a\Delta\tau$ можно получить

$$\frac{P_n(\tau+\Delta\tau)-P_n(\tau)}{\Delta\tau} + aP_n(\tau) = aP_{n-1}(\tau) .$$

Переходя к пределу при $\Delta\tau\to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_n(\tau)}{d\tau} + aP_n(\tau) = aP_{n-1}(\tau), \qquad n\geq 1$$

с начальным условием $P_n(0) = 0$. Решение этого д.у. можно получить, рассматривая его как рекуррентное соотношение

$$P_n(\tau) = ae^{-a\tau}\int_0^\tau e^{at} P_{n-1}(t)\,dt \quad .$$

Для $n=1$ и $P_0(t)=e^{-at}$

$$P_1(\tau) = ae^{-a\tau}\int_0^\tau e^{at} e^{-at}\,dt = a\tau\, e^{-a\tau} \quad ,$$

$$P_2(\tau) = ae^{-a\tau}\int_0^\tau e^{at} a\ t\ e^{-at}\,dt = \frac{(a\tau)^2}{2} e^{-a\tau} \quad \ldots$$

Продолжая, приходим по индукции к утверждению теоремы (10.3).

Для выяснения смысла постоянной a найдем среднее число событий в интервале τ :

$$E_\tau(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(a\tau)^n}{n!} e^{-a\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\tau)^n}{(n-1)!} e^{-a\tau} = a\tau e^{-a\tau}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\tau)^{n-1}}{(n-1)!} = a\tau \quad . \qquad (10.5)$$

Если ввести величину $\bar{n} = E_\tau(n)/\tau$ - среднее число событий в единицу времени, то $a=\bar{n}$.

Предположение о том, что $a=const$ равносильно предположению об однородности (стационарности) потока. На практике именно оно чаще всего нарушается. В этом случае полагают, что

$$P\{X(t,t+\Delta t)=1\} \ = \ a(t)\Delta t + o(t) \quad ,$$

то есть то, что a есть некоторая функция времени. В этом случае можно получить

$$P\{X(t_1,t_2)=n\} \ = \ \frac{1}{n!}\left(\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du\right)^n \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du\right] \quad . \qquad (10.6)$$