Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 8

12. Линейные системы. Спектральный и временной подходы.

Линейными называются системы или устройства, процессы в которых можно описать при помощи линейных уравнений (алгебраических, дифференциальных обыкновенных или в частных производных с постоянными или переменными параметрами). Все линейные системы характеризуются следующим свойством: если на систему одновременно действует несколько внешних сил, то на каждую она откликается независимо. Пусть $x_m(t)$ - отклик системы на воздействие $f_m(t)$, тогда при воздействии

$$f(t)=\sum_m a_m f_m(t) \tag{12.1}$$

отклик будет

$$x(t)=\sum_m a_m x_m(t)\quad , \tag{12.2}$$

где a_m - постоянные. В этом состоит принцип суперпозиции.

Рассмотрим случай, когда разложение внешней силы (12.1) производится по гармоническим колебаниям, то есть под действием силы

$$f_m(t)=e^{i\omega_m t} \tag{12.3}$$

линейная система совершает колебание

$$x_m(t)=K(\omega_m,t)\,e^{i\omega_m t}\quad . \tag{12.4}$$

Переходя в (12.1) и (12.2) от суммы к интегралу, получим, что при действии силы произвольного вида

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{i\omega t}\,d\omega \tag{12.5}$$

отклик системы будет

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} K(\omega,t) e^{i\omega t} d\omega \quad . \tag{12.6}$$

Функция $K(\omega,t)$ полностью характеризует линейную систему и называется *коэффициентом передачи* или *частотной передаточной функцией*. Зависимость этой функции от времени связана с возможными изменениями во времени самой системы (например при модуляции ее параметров). При этом очевидно в спектре колебаний на выходе могут появится такие частоты, которых нет в спектре внешней силы. В случае систем с постоянными параметрами, т.е. когда $K(\omega,t)=K(\omega)$, появление новых частот невозможно. Заметим, что (12.6) может рассматриваться как спектральное разложение вынужденных колебаний, совершаемых системой:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} K(\omega,t) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad . \tag{12.7}$$

Описание линейной системы с помощью частотной передаточной функции $K(\omega,t)$ и составляет сущность спектрального подхода.

Рассмотрим теперь силу в виде δ -импульса:

$$f_m(t) = \delta(t-t_m) \quad . \tag{12.8}$$

Отклик линейной системы на такую силу представим в виде

$$x_m(t) = H(t,t_m) \quad . \tag{12.9}$$

Произвольную силу можно представить в виде разложения по дельта-функциям:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\delta(t-\theta) d\theta \quad , \tag{12.10}$$

откуда на основании (12.1) и (12.2) отклик линейной системы может быть записан как

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) H(t,\theta) d\theta \quad . \tag{12.11}$$

Выражение (12.11) называется *интегралом Дюамеля*, а функция $H(t,\theta)$ - *функцией Грина*. Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Поскольку отклик на δ -импульс не может возникнуть раньше самого

импульса, то $H(t,\theta)=0$, если $t<\theta$. Это обстоятельство можно записать в виде

$$H(t,\theta)=1(t-\theta)h(t,\theta)\ , \tag{12.12}$$

где $1(t-\theta)$ - функция единичного скачка (Хевисайда), а $h(t,\theta)$ - непрерывная функция Грина.

2. Если система не меняется со временем, то функция Грина зависит только от разности аргументов:

$$H(t,\theta)=H(t-\theta),\quad h(t,\theta)=h(t-\theta)\ . \tag{12.13}$$

3. С учетом (12.12) и произведя замену переменных $\theta\to t-\theta$ интеграл Дюамеля можно записать в виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\theta)h(t,\theta)d\theta=\int_{0}^{\infty} h(t,t-\theta)f(t-\theta)d\theta\ . \tag{12.14}$$

В случае систем с постоянными параметрами, учитывая (12.13), можно записать

$$x(t)=\int_{0}^{\infty} h(\theta)f(t-\theta)d\theta=\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)f(t-\theta)d\theta\ . \tag{12.15}$$

Описание линейной системы с помощью функции Грина составляет сущность временного подхода. Частотное и временное представления полностью эквивалентны, однако частотное представление иногда удобнее для описания процессов в установившемся режиме, а временное — при рассмотрении переходных процессов.

Между частотной передаточной функцией и функцией Грина (ее еще называют *импульсной характеристикой*) имеется однозначная связь. Чтобы ее установить, представим с помощью замены $\theta\to t-\theta$ интеграл (12.11) в виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta)H(t,t-\theta)d\theta= \tag{12.16}$$

(подставляя сюда спектральное разложение (12.5) для $f(t-\theta)$ продолжим)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}e^{i\omega(t-\theta)}d\omega\right)H(t,t-\theta)d\theta=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(t,t-\theta)e^{-i\omega\theta}d\theta\right)e^{i\omega t}d\omega\ . \tag{12.17}$$

Сравнивая (12.17) с (12.6), находим, что $K(\omega,t)$ и $H(t,\theta)$ связаны между собой преобразованием Фурье:

$$K(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(t,t-\theta)e^{-i\omega\theta}d\theta \quad , \tag{12.18}$$

$$H(t,t-\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\omega,t)e^{i\omega\theta}d\omega \quad . \tag{12.19}$$

В случае систем с постоянными параметрами, согласно (12.13) выражения упрощаются:

$$K(\omega)=\int_{0}^{\infty}h(\theta)e^{-i\omega\theta}d\theta \quad , \tag{12.20}$$

$$h(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\omega)e^{i\omega\theta}d\omega \quad . \tag{12.21}$$

В линейных системах могут существовать свободные колебания, не связанные с внешней силой и определяющиеся начальными условиями, которые однако можно представить в виде эквивалентной силы. Колебания в линейных системах с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, в общем случае вида

$$\sum_{n=0}^{N}a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n}=f(t) \quad , \tag{12.22}$$

а функция Грина может быть выражена через свободные колебания $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)$, являющиеся линейно независимыми решениями соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{n=0}^{N}a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n}=0 \quad . \tag{12.23}$$

Убедимся в этом и для начала рассмотрим уравнение первого порядка

$$a_1(t)\dot{x}+a_0(t)x=f(t) \quad . \tag{12.24}$$

Его решение которого будем искать в виде

$$x(t)=C_1(t)y_1(t) \quad , \tag{12.25}$$

где $C_1(t)$ - неизвестная пока функция, а $y_1(t)$ - решение однородного уравнения

$$a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\,y = 0 \quad . \tag{12.26}$$

Подставляя (12.25) в (12.24) можно получить

$$a_1\dot{C}_1 y_1 + C_1\left(a_1\dot{y}_1 + a_0 y_1\right) = f(t) \quad ,$$

а с учетом (12.26)

$$a_1\dot{C}_1 y_1 = f \quad ,$$

откуда получим

$$C_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(\theta)\,d\theta}{a_1(\theta)\,y_1(\theta)} \quad . \tag{12.27}$$

В результате получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\theta)\frac{y_1(t)\,d\theta}{a_1(\theta)\,y_1(\theta)} \quad . \tag{12.28}$$

Из сравнения этого решения с (12.14) (третье свойство функции Грина) следует, что для систем первого порядка функция Грина выражается через функцию $y_1(t)$, описывающую свободные колебания, следующим образом:

$$h(t,\theta) = \frac{y_1(t)}{a_1(\theta)\,y_1(\theta)} \quad . \tag{12.29}$$

Продолжим рассуждения для уравнения второго порядка

$$a_2(t)\,\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = f(t) \quad , \tag{12.30}$$

решение которого ищется в виде

$$x = C_1(t)\,y_1(t) + C_2(t)\,y_2(t) \quad . \tag{12.31}$$

Дифференцирование (12.31) дает

$$\dot{x} = \dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2 + C_1\dot{y}_1 + C_2\dot{y}_2 \quad . \tag{12.32}$$

Поскольку мы выразили одну функцию $x(t)$ через две новых, т.е. через $C_1(t)$ и $C_2(t)$, то можем задаться одним произвольным соотношением между ними. Пусть это будет

$$\dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2 = 0 \quad . \tag{12.33}$$

Тогда

$$\dot{x} = C_1 \dot{y}_1 + C_2 \dot{y}_2, \qquad \ddot{x} = \dot{C}_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2 + C_1 \ddot{y}_1 + C_2 \ddot{y}_2 \quad . \tag{12.34}$$

Подставляя выражения (12.31) и (12.34) в исходное уравнение второго порядка (12.30), получим

$$\dot{C}_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2 = f / a_2 \quad . \tag{12.35}$$

Пользуясь произвольным условием (12.33), поочередно выражая $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$, получим

$$\dot{C}_1 = -f \, \frac{1}{a_2} \, \frac{y_2}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2}, \qquad \dot{C}_2 = f \, \frac{1}{a_2} \, \frac{y_1}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2}$$

и, следовательно,

$$C_1(t) = -\int_{-\infty}^{t} \frac{f}{a_2} \, \frac{y_2 \, d\theta}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2}, \qquad C_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f}{a_2} \, \frac{y_1 \, d\theta}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2} \quad .$$

Тогда искомое решение уравнения второго порядка (12.30), согласно (12.31) имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(\theta)}{a_2(\theta)} \, \frac{y_1(\theta) y_2(t) - y_2(\theta) y_1(t)}{y_1(\theta) \dot{y}_2(\theta) - \dot{y}_1(\theta) y_2(\theta)} \, d\theta \quad . \tag{12.36}$$

Сравнение этого решения с (12.14) (3-е свойство) дает выражение для функции Грина уравнения второго порядка:

$$h(t,\theta) = \frac{1}{a_2(\theta)} \, \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) \end{vmatrix}} \quad . \tag{12.37}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что в общем случае уравнения N-го порядка (12.22), функция Грина может быть выражена через решения соответствующего однородного уравнения (12.23) и их производные следующим образом:

$$h(t,\theta)=\frac{1}{a_N(\theta)}\frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_N(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-2)}(\theta) & \dots & y_N^{(N-2)}(\theta) \\ y_1(t) & \dots & y_N(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_N(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)}(\theta) & \dots & y_N^{(N-1)}(\theta) \end{vmatrix}} . \qquad (12.38)$$

При этом имеет место соотношение:

$$\left.\frac{\partial^m}{\partial t^m}h(t,\theta)\right|_{t=\theta}=\begin{cases} 0, & m=0,1,2,\dots,N-2, \\ \dfrac{1}{a_N(\theta)}, & m=N-1. \end{cases} . \qquad (12.39)$$

В теории линейных дифференциальных уравнений известно, что изменение во времени определителя Вронского, стоящего в знаменателе выражения для функции Грина (12.38), определяется коэффициентами при двух старших производных уравнения (12.23) (или (12.22)):

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_{N-1}(\theta)}{a_N(\theta)}d\theta\right\} . \qquad (12.40)$$