

# Статистическая радиофизика и теория информации

## Лекция 9

### 13. Отклик линейной системы на шумовое воздействие.

Колебания  $x(t)$ , совершаемые линейной системой под действием некоторой случайной силы

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (13.1)$$

можно непосредственно выразить через силу или ее амплитудный спектр (см. (12.6) и (12.11) в предыдущей лекции):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t, \theta) d\theta = \quad (13.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} K(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega . \quad (13.3)$$

Статистические характеристики процесса  $x(t)$  на выходе линейной системы можно получить проводя статистическое усреднение выражений (13.2) или (13.3). Для простоты предположим, что наша линейная система имеет постоянные и вещественные параметры. Вещественность параметров еще означает, что коэффициенты  $a_n$  в дифференциальном уравнении описывающем линейную систему (см. (12.22) в предыдущей лекции) вещественны. Все это означает, что

$$H(t, \theta) = H^*(t, \theta) = H(t - \theta), \quad K(\omega, t) = K(\omega) = K^*(-\omega) . \quad (13.4)$$

Пусть, кроме того, внешняя сила  $\xi(t)$  на входе системы это стационарный шум, такой что

$$M[\xi] = 0, \quad M[\xi \xi_{\tau}] = R_{\text{ax}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ax}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega , \quad (13.5)$$

$$M[\xi_{\omega} \xi_{\omega'}] = M[\xi_{\omega} \xi_{-\omega'}^*] = \frac{1}{2\pi} S_{\text{ax}}(\omega) \delta(\omega + \omega'), \quad M[\xi_{\omega}] = 0 . \quad (13.6)$$

В этом случае процесс  $x(t)$  на выходе также стационарен и для него по аналогии с (13.5) можно записать

$$M[xx_\tau] = R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega . \quad (13.7)$$

С другой стороны, усредняя  $x(t)$  и  $x(t)x(t+\tau)$  можно получить

$$M[x] = M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega e^{i\omega t} d\omega \right] = \int_{-\infty}^{\infty} M[\xi_\omega] e^{i\omega t} d\omega = 0 ,$$

и

$$\begin{aligned} M[xx_\tau] = R_{\text{вых}}(\tau) &= M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega K(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega'} K(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[\xi_\omega \xi_{\omega'}] K(\omega) K(\omega') e^{i(\omega+\omega')t} e^{i\omega'\tau} d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ex}}(\omega) |K(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega . \end{aligned} \quad (13.8)$$

Сравнивая это выражение с (13.7) и пользуясь симметрией корреляционной функции и энергетического спектра для стационарного процесса, можно записать

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{ex}}(\omega) |K(\omega)|^2 . \quad (13.9)$$

Рассмотрим теперь как трансформируется корреляционная функция случайного процесса при прохождении через линейную систему. Воспользуемся тем, что интеграл Дюамеля для стационарного процесса можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t-\theta) d\theta$$

и вычислим используя это выражение корреляционную функцию:

$$R_{\text{вых}}(\tau) = M[xx_\tau] = M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha) \xi(t-\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} H(\beta) \xi(t-\beta) d\beta \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha) H(\beta) M[\xi(t-\alpha)\xi(t+\tau-\beta)] d\alpha d\beta = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha) H(\beta) R(\tau+\alpha-\beta) d\alpha d\beta =
\end{aligned}$$

(выполняя замену переменных  $u = \beta - \alpha$ ;  $v = \beta$ , продолжим)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H(v) H(v-u) dv \right] R_{\text{вх}}(\tau-u) du .$$

Обозначив выражение в квадратных скобках как  $R_h(u)$ , окончательно получим выражение для корреляционной функции на выходе

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_h(u) R_{\text{вх}}(\tau-u) du . \quad (13.10)$$

Функцию  $R_h(\tau)$  называют *системной корреляционной функцией*. Таким образом, к.ф. отклика линейной системы выражается через свертку к.ф. входного сигнала и системной к.ф. Проясним смысл системной корреляционной функции. Рассмотрим преобразование Фурье от  $R_h(\tau)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) H(t-\tau) dt e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

(произведя замену  $u = t - \tau$ ;  $v = t$ , продолжим)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(v) H(u) dv e^{-i\omega(v-u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} H(v) e^{-i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} H(u) e^{i\omega u} du = \\
&= K(\omega) K^*(\omega) = |K(\omega)|^2 . \quad (13.11)
\end{aligned}$$

Таким образом, получили что  $|K(\omega)|^2$  есть прямое преобразование Фурье от  $R_h(\tau)$ , а раз так, то можно записать и обратное преобразование:

$$R_h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega . \quad (13.12)$$

Если сравнить (13.12) с (13.8), то можно заключить, что  $R_h(\tau)$  есть корреляционная функция на выходе линейной системы, если на ее вход подан белый шум, для которого  $S_{\text{вх}}(\omega) = 1$ .

Рассмотрим фильтрацию шума избирательными системами. Из выражения (13.9) ясно, что при прохождении сигнала через линейную систему подчеркиваются те части спектра  $S_{\text{вх}}(\omega)$ , которые соответствуют наибольшим значениям функции  $|K(\omega)|^2$ . Последнюю называют *резонансной кривой* линейной системы. Об устройствах, изменяющих форму спектра шума говорят как об *избирательных системах* или *фильтрах*. На рис. 1 представлены два предельных случая. В случае когда резонансная кривая намного уже спектра входного сигнала (левый график), проявляются фильтрующие свойства линейной системы. В случае же когда резонансная кривая много шире спектра входного сигнала фильтрация не происходит.

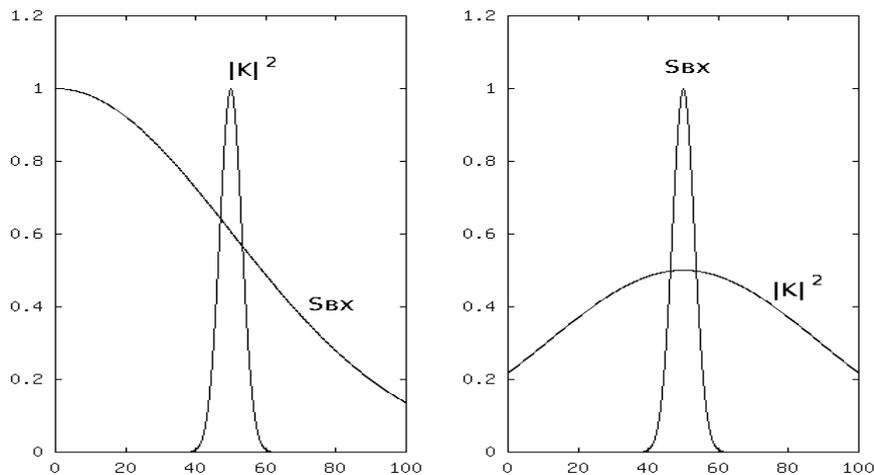


Рис. 1. Предельные случаи соотношения ширины резонансной кривой и ширины спектра входного сигнала.

Рассмотрим устройство, которое в радиотехнике называется RC-фильтром. На рис. 2 показаны параллельный (слева) и последовательный (справа) RC-фильтры.

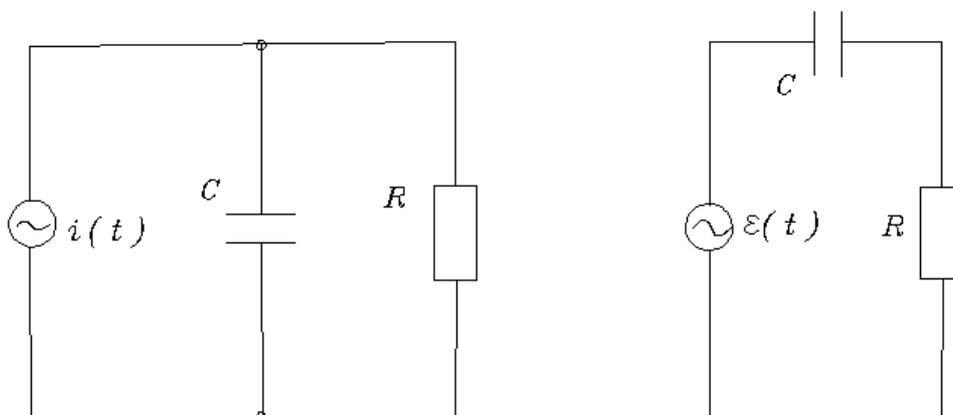


Рис.2. Параллельный и последовательный RC-фильтры.

Для параллельного RC-фильтра можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = i(t) , \quad (13.13)$$

где  $q$  - заряд на обкладках конденсатора (для последовательной схемы вместо  $i(t)$  следует поставить  $\varepsilon(t)/R$ ). Уравнение свободных колебаний

$$\dot{y} + \alpha y = 0 , \quad (13.14)$$

где  $\alpha = 1/RC$  имеет решение

$$y(t) = e^{-\alpha t} . \quad (13.15)$$

Параметр  $1/\alpha = RC = T$  называется временем релаксации. Считая  $i(t)$  входным сигналом системы, а  $q(t)$  - выходным, запишем функцию Грина (см. (12.29)):

$$h(t-\theta) = \frac{y(t)}{a_1(\theta)y(\theta)} = e^{-\alpha(t-\theta)} . \quad (13.16)$$

Решение (13.13) можно записать в виде интеграла Дюамеля:

$$q(t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\theta} i(t-\theta) d\theta . \quad (13.17)$$

Чтобы найти коэффициент передачи  $K(\omega)$ , положим в (13.13)  $i(t) = e^{i\omega t}$  и  $q(t) = K(\omega)e^{i\omega t}$ . Эта подстановка позволяет определить коэффициент передачи и резонансную кривую RC-фильтра:

$$K(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}, \quad |K(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} . \quad (13.18)$$

Из (13.18) видно, что RC-фильтр обладает способностью выделять низкие частоты. При  $\omega=0$  функция  $|K(\omega)|^2$  максимальна, а с ростом частоты плавно уменьшается. Подставив выражение для  $|K(\omega)|^2$  в выражение (13.12) для  $R_h(\tau)$ , получим

$$R_h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha} . \quad (13.19)$$

Рассмотрим теперь в качестве линейной системы колебательный контур. На рис. 3 приведены последовательный и параллельный колебательные контуры.

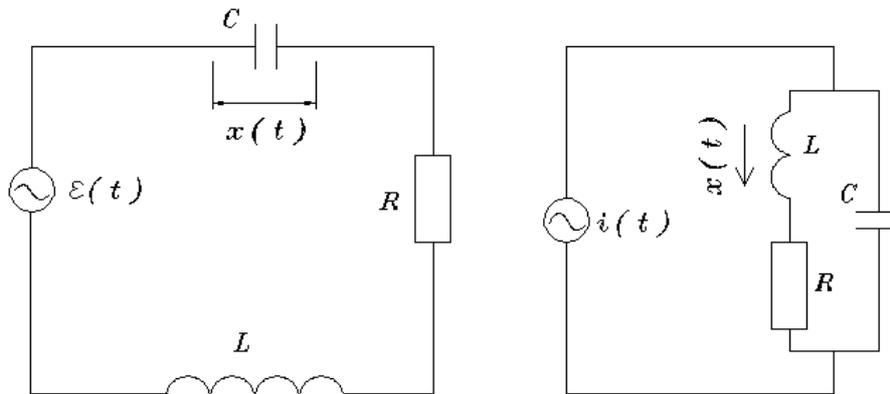


Рис. 3. Последовательный (слева) и параллельный (справа) колебательные контуры.

Напряжение на обкладках конденсатора последовательного контура описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \varepsilon(t) = f(t) \quad , \quad (13.20)$$

где  $2\alpha = \frac{R}{L}$  ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  . В случае параллельного контура в качестве выходного сигнала рассматривается ток через индуктивность и уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 i(t) = f(t) \quad . \quad (13.21)$$

Уравнение свободных колебаний

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (13.22)$$

имеет решения

$$y_{1,2} = e^{-\alpha t \pm i\omega_1 t} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad . \quad (13.23)$$

Функция Грина в этом случае

$$h(t, \theta) = \frac{1}{a_2(\theta)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) \end{vmatrix}} = \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha(t-\theta)} \sin[\omega_1(t-\theta)] \quad . \quad (13.24)$$

Решение уравнений для контуров можно записать в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\theta} \sin(\omega_1\theta) f(t-\theta) d\theta . \quad (13.25)$$

Аналогично тому как это было сделано для RC-фильтра, полагая в дифференциальных уравнениях (13.20) и (13.21)  $f(t) = e^{i\omega t}$ ,  $x(t) = e^{i\omega t} K(\omega)$ , найдем частотную передаточную функцию контура

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \quad (13.26)$$

и его резонансную кривую

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} . \quad (13.27)$$

Наиболее сильный отклик контура соответствует резонансной частоте

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} < \omega_1 < \omega_0 .$$

При этом

$$|K(\omega_{рез})|^2 = |K(\omega)|_{max}^2 = \frac{1}{4\alpha^2\omega_1^2} . \quad (13.28)$$

Уменьшение резонансной кривой в 2 раза по сравнению с максимальным значением приходится на частоты

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\omega_{рез}^2 \mp 2\alpha\omega_1} . \quad (13.29)$$

Безразмерную величину  $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$  называют добротностью контура, тем уже резонансная кривая. На рис. 4 приведены нормированные резонансные кривые для разных значений добротности.

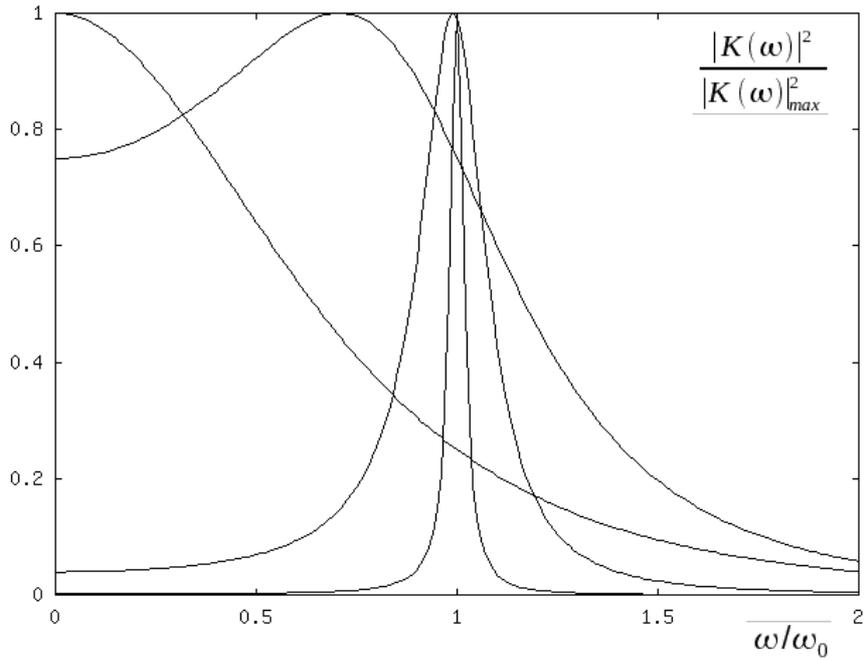


Рис. 4. Нормированные резонансные кривые для значений параметра  $Q = 1, 2, 10, 50$  .

Высокочастотный контур ( $Q \gg 1$ ) будет выделять из спектра белого шума ту область, которая расположена вблизи резонансной частоты  $\omega_{рез} \approx \omega_0$  в пределах относительно узкой полосы, примерно равной  $\Delta \omega = \omega_3 - \omega_2 = 2\alpha \leq \omega_0$ . Площадь под резонансной кривой

$$\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{4\alpha\omega_0^2} . \quad (13.30)$$

Системная корреляционная функция соответствующая действию на контур белого шума имеет вид:

$$R_h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} d\omega = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{4\alpha^2\omega_0^2} \left( \cos(\omega_1\tau) + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin(\omega_1\tau) \right) . \quad (13.31)$$