Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 10.

14. Синтез согласованного фильтра.

Рассмотрим линейную систему на вход которой подается аддитивная смесь полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$:

$$\xi(t) = s(t)+n(t) \quad , \tag{14.1}$$

причем сигнал $s(t)$ является известной функцией времени, а $n(t)$ это стационарный белый шум, для которого $R_n(\tau) = S_0\,\delta(\tau)$ и $M[n(t)]=0$. Отношение сигнал/шум на выходе линейной системы определим как

$$q(t) = \frac{s^2_{вых}(t)}{\sigma^2_{nвых}} \quad , \tag{14.2}$$

где $s_{вых}(t)$ это сигнал на выходе фильтра (линейной системы), а $\sigma^2_{nвых}$ это дисперсия шума $n_{вых}(t)$ на выходе фильтра.

Найдем такую импульсную характеристику линейной системы (функцию Грина) $h(\tau)$, которая обеспечивает максимум отношения сигнал/шум $q(t)$ в некоторый момент времени $t=t_0$. Сигнал на выходе фильтра выражается в виде свертки (см. (12.15)):

$$s_{вых}(t) = \int\limits_0^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)\,d\tau \quad . \tag{14.3}$$

Дисперсия шума на выходе фильтра определяется по формуле (см. (13.8)):

$$\begin{gathered}\sigma^2_{nвых} = R_{nвых}(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)|K(\omega)|^2\,d\omega = \\ = S_0\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(\omega)|^2 d\omega = S_0\int\limits_0^{\infty} h^2(\tau)\,d\tau\end{gathered} \quad , \tag{14.4}$$

где $S_n(\omega)$ - энергетический спектр шума на входе, а в последнем равенстве использована теорема Парсеваля и (12.12). Таким образом, отношение сигнал/шум на выходе фильтра можно записать как

$$q(t_0) = \frac{s^2_{вых}(t_0)}{\sigma^2_{пвых}} = \frac{\left[\int\limits_0^\infty h(\tau)s(t_0-\tau)d\tau\right]^2}{S_0\int\limits_0^\infty h^2(\tau)d\tau} \quad . \tag{14.5}$$

Для отыскания максимума (14.5) можно воспользоваться неравенством Коши-Буняковского (см. например Б.М. Будак, С.В.Фомин. Кратные интегралы и ряды, М:Физматлит — 2002)

$$\left[\int\limits_0^\infty h(\tau)s(t_0-\tau)d\tau\right]^2 \le \int\limits_0^\infty h^2(\tau)d\tau \int\limits_0^\infty s^2(t_0-\tau)d\tau \quad , \tag{14.6}$$

в котором равенство достигается только если

$$h(t) = C\ s(t_0-t) \tag{14.7}$$

на интервале $[0,+\infty)$, где $C=const$. Таким образом импульсная характеристика оптимального фильтра имеет форму сигнала, распространяющегося в обратную сторону по временной оси, начиная с момента времени t_0 . С точностью до множителя можно записать

$$q_{max} = \left[\frac{s^2_{вых}(t_0)}{\sigma^2_{пвых}}\right]^2_{max} = \frac{1}{S_0}\int\limits_0^\infty s^2(t_0-\tau)d\tau = \frac{1}{S_0}\int\limits_{-\infty}^{t_0} s^2(t)dt = \frac{E_s(t_0)}{S_0} \quad , \tag{14.8}$$

где $E_s(t)$ это энергия сигнала, накопленная к моменту t_0 , для которого должна быть осуществлена максимизация отношения сигнал/шум. Если предположить, что сигнал имеет конечную продолжительность T , то очевидно, что максимальное отношение сигнал/шум достигается при максимальной накопленной энергии сигнала $E_s = E_s(T)=\int\limits_0^T s^2(t)dt$, то есть когда $t_0=T$.

Рассмотрим отклик оптимального фильтра $x(t)$ на входное воздействие (14.1), (для простоты положим в (14.7) $C=1$):

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^\infty h(\tau)\xi(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^\infty s(t_0-t)\xi(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^\infty s(u)\xi(u+t_0-t)du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty s(u)s(u+t_0-t)du + \int\limits_{-\infty}^\infty s(u)n(u+t_0-t)du \quad . \tag{14.9}$$

Первое слагаемое в (14.9) совпадает с сигналом на выходе $s_{вых}(t)$, а второе является шумом на выходе фильтра $n_{вых}(t)$. При $t=t_0$ сигнальная составляющая на выходе (первое слагаемое справа в (14.9)) $s_{вых}(t_0)=E_s$. Введем корреляционную функцию сигнала

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(u+\tau)\,du = B_s(-\tau) \quad . \tag{14.10}$$

При таком определении к.ф. сигнала, при $\tau=t_0-t$ выходной сигнал $s_{вых}(\tau)$ совпадает с $B_s(\tau)$. Рассмотрим к.ф. шума $n_{вых}(t)$ на выходе согласованного фильтра:

$$R_{nвых}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_h(v) R_n(\tau-v)\,dv \quad , \tag{14.11}$$

где $R_h(\tau)$ - системная корреляционная функция. Подставляя выражение для $h(t)$ в выражение для системной к.ф. можно получить следующее:

$$\begin{aligned} R_h(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(u-\tau)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0-u)s(t_0-u+\tau)\,du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(u+\tau)\,du = B_s(\tau) \end{aligned} \quad . \tag{14.12}$$

Учитывая то обстоятельство, что при белом шуме на входе $R_n(\tau) = S_0\delta(\tau)$ из (14.11) и (14.12) можно получить, что

$$R_{nвых}(\tau) = S_0 B_s(\tau) \quad . \tag{14.13}$$

Таким образом, к.ф. шума на выходе совпадает по форме с к.ф. сигнала. Можно также записать следующее выражение для дисперсии шума на выходе:

$$\sigma^2_{nвых} = R_{nвых}(0) = S_0 B_s(0) = S_0 E_s \quad .$$

Рассмотрим теперь коэффициент передачи оптимального фильтра:

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\infty} s(t_0-t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t_0}\int_0^{\infty} s(x)e^{i\omega x}dx = e^{-i\omega t_0}\hat{s}(\omega)^* \quad . \tag{14.14}$$

Из (14.14) следует выражение для резонансной кривой:

$$|K(\omega)|^2 = \hat{s}(\omega)^*\hat{s}(\omega) = S_s(\omega) \quad , \tag{14.15}$$

что означает, что резонансная кривая оптимального фильтра совпадает с энергетическим спектром $S_s(\omega)$ полезного сигнала $s(t)$. Можно определить и как изменится спектр белого шума при прохождении через оптимальный фильтр:

$$S_{nвых}(\omega)=|K(\omega)|^2 S_0 = S_s(\omega) S_0 \quad . \tag{14.16}$$

Рассмотрим теперь случай, когда помеха $n(t)$ не является белым шумом и имеет некоторый энергетический спектр $S_n(\omega)\neq const$. Отношение сигнал/шум по прежнему определяется выражением (14.2). При этом

$$\sigma^2_{nвых}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{nвых}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)|K(\omega)|^2\,d\omega \quad . \tag{14.17}$$

Выражение (14.17) легко получить если вспомнить, что $\sigma^2_{nвых}=R_{nвых}(0)$, выражение (13.10), определение системной к.ф. и равенство Парсеваля (впрочем, возможна и другая последовательность выкладок). Сигнал $s_{вых}(t)$ в момент времени t_0 можно записать в виде обратного преобразования Фурье:

$$s_{вых}(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}_{вых}(\omega)e^{i\omega t_0}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}(\omega)K(\omega)e^{i\omega t_0}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{S_n(\omega)}}\right]\left[K(\omega)\sqrt{S_n(\omega)}\right]e^{i\omega t_0}\,d\omega \quad . \tag{14.18}$$

Тогда согласно неравенству Коши-Буняковского можно записать

$$s^2_{вых}\le\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{s}(\omega)|^2}{S_n(\omega)}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|K(\omega)|^2 S_n(\omega)\,d\omega \quad . \tag{14.19}$$

Следовательно,

$$q\le q_{max}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{s}(\omega)|^2}{S_n(\omega)}\,d\omega \quad . \tag{14.20}$$

Неравенство обращается в равенство когда

$$const\times\frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{S_n(\omega)}}=K(\omega)\sqrt{S_n(\omega)}\,e^{i\omega t_0} \quad . \tag{14.21}$$

В результате с точностью до множителя можно получить коэффициент передачи оптимального фильтра по критерию максимума отношения сигнал/шум:

$$K_{опт}(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{S_n(\omega)} e^{-i\omega t_0} \quad . \tag{14.22}$$

Таким образом, резонансная кривая оптимального фильтра точностью до множителя имеет вид:

$$|K_{опт}(\omega)|^2 = \frac{S_s(\omega)}{(S_n(\omega))^2} \quad . \tag{14.23}$$

Рассмотрим теперь коротко оптимальную фильтрацию для случая цифровых сигналов, то есть когда наблюдается величина

$$\xi_k = s_k + n_k \quad , \tag{14.24}$$

которая является дискретной версией (14.1), т.е.

$$\xi(t_k) = s(t_k) + n(t_k), \quad t_k = kT, \quad k = 0,1,2,\dots,N-1 \quad .$$

Здесь предполагается, что величины отвечающие за полезный сигнал s_k и помеху n_k между собой не коррелируют.

Отклик цифрового фильтра можно записать как

$$x_n = \sum_{k=0}^{m} \xi_{m-k} g_k \quad , \tag{14.25}$$

где g_k - отсчеты импульсной переходной характеристики фильтра, причем $g_k = \xi_k = 0$ если k вне интервала $[0, m]$. В конце интервала

$$x_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{N-1-k} g_k \quad . \tag{14.26}$$

Если ввести следующие векторы:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})^T, \quad & \boldsymbol{g}' &= (g_{N-1}, g_{N-2}, \dots, g_0)^T \quad , \\
\boldsymbol{\xi} &= (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1})^T, \quad & \boldsymbol{\xi}' &= (\xi_{N-1}, \xi_{N-2}, \dots, \xi_0)^T \quad , \\
\boldsymbol{s} &= (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})^T, \quad & \boldsymbol{s}' &= (s_{N-1}, s_{N-2}, \dots, s_0)^T \quad , \\
\boldsymbol{n} &= (n_0, n_1, \dots, n_{N-1})^T, \quad & \boldsymbol{n}' &= (n_{N-1}, n_{N-2}, \dots, n_0)^T \quad ,
\end{aligned}$$

то свертку (14.26) можно записать с помощью скалярных произведений

$$x_{N-1} = \boldsymbol{\xi}'^{T}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{s}' + \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{n}' \quad . \tag{14.27}$$

Мощность отклика определяется как

$$P_x = M\left[x_{N-1}^2\right] = M\left[\boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi}'^{T}\boldsymbol{g}\right] = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_{\xi'}\boldsymbol{g} \quad ,$$

где $\boldsymbol{R}_{\xi'}$ - корреляционная матрица. В случае стационарного сигнала $\boldsymbol{R}_{\xi'} = \boldsymbol{R}_{\xi}$ и, следовательно,

$$P_x = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_{\xi}\boldsymbol{g} \quad .$$

Аналогичные выражения можно записать для полезного сигнала и для помехи соответственно:

$$P_s = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{g}, \qquad P_n = \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{g} \quad . \tag{14.28}$$

Таким образом, для создания оптимального цифрового фильтра в смысле максимума отношения сигнал/шум нужно максимизировать

$$q = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{g}} \quad . \tag{14.29}$$