Статистическая радиофизика и теория информации

Лекции 11-12.

15. Случайные поля и волны в линейных средах

Случайные волны возникают как в результате рассеяния регулярных волн в средах с хаотическими параметрами, так и излучаются источниками со случайным характером. Теория случайных волн это расширение спектрально-корреляционной теории случайных процессов в системах с сосредоточенными параметрами еще и в пространство.

Рассмотрение случайных волн ограничим квазиплоскими квазигармоническими случайными волнами вида

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\,A(x,y,z,t)\exp\left(i\left(\omega_0 t - k_0 z\right)\right) + \text{к.с.} \quad , \tag{1}$$

где $A(x,y,z,t)$ - комплексная амплитуда медленно меняющаяся по сравнению с масштабами среднего периода колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ и средней длины волны $\lambda_0=\frac{2\pi}{k_0}$, $\boldsymbol{e}$ - единичный вектор поляризации волны. Линейность среды, вынесенная в заголовок, предполагает справедливость принципа суперпозиции волн.

Определим корреляционную функцию в виде

$$R(\boldsymbol{r_1},z_1,t_1;\boldsymbol{r_2},z_2,t_2) = M\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_1},z_1,t_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_2},z_2,t_2)\right] \quad , \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}$ - вектор в плоскости xy , т.е. в плоскости перпендикулярной оси z , которая является направлением распространения волны. Ограничим рассмотрение такой корреляционной функции, которая распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций, т.е.

$$R = R(\boldsymbol{r_1},z_1;\boldsymbol{r_2},z_2)\,R(t_1,t_2;z_1,z_2) \quad . \tag{3}$$

Для полей с такими когерентными свойствами эффекты временной и пространственной когерентности можно рассматривать отдельно. При изучении пространственной статистики можно выделить следующие случаи:

поперечную пространственную корреляционную функцию

$$R(\boldsymbol{r_2},\boldsymbol{r_2},z) \;=\; R(x_1,x_2,y_1,y_2,z)=M\left[A(\boldsymbol{r_1},z)\,A^*(\boldsymbol{r_2},z)\right] \;. \qquad (4)$$

Если случайное поле статистически *однородно*, то

$$R(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},z) \;=\; R(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_2}=\boldsymbol{s},z) \;=\; R(s_x,s_y,z) \;, \qquad (5)$$

т.е. зависит от разности координат в поперечной плоскости.

Если поле *изотропно*, то

$$R(\boldsymbol{s},z) \;=\; R(s,z) \;. \qquad (7)$$

Для статистически однородного (5) или изотропного (6) полей имеет смысл ввести *угловую спектральную плотность* или *угловой спектр*

$$G(k_x,k_y,z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(s_x,s_y,z)\,e^{i(k_x s_x+k_y s_y)}\,ds_x\,ds_y \;. \qquad (7)$$

Случайная волна называется квазиплоской, если ширина углового спектра мала, т.е.

$$\frac{\Delta k_x}{k_0} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta k_y}{k_0} \ll 1 \;.$$

Таким образом, волновое поле (1) можно представить как случайную суперпозицию плоских волн, волновые векторы которых сосредоточены вокруг направления оси z и составляют с ней малые углы

$$\theta_x \;=\; \frac{k_x}{k_0} \;\ll\; 1, \qquad \theta_y \;=\; \frac{k_y}{k_0} \;\ll\; 1 \;.$$

Итак, при рассмотрении волн приходится иметь дело с двумя спектрами: угловым (волновым) $G(\boldsymbol{k})$ и частотным $S(\omega)$. И если для изучения временной статистики достаточно хорошей моделью является модель стационарного процесса, то в большинстве практических задач случайное поле в плоскости перпендикулярной направлению распространения существенно неоднородно. Это связано, как правило, с пространственной ограниченностью поля волны. Помимо поперечной, можно рассматривать продольную функцию корреляции

$$R(z,z+s) \;=\; M\left[A(x,y,z)\,A^*(x,y,z+s)\right] \;. \qquad (8)$$

Теория однонаправленного распространения волн в однородной среде

При распространении волн в линейной среде необходимо учитывать *дифракцию* (из-за конечности размеров источника света или антенны) и *дисперсию* (зависимость от частоты или длины волны). Строгая теория распространения радиоволн основывается на уравнениях Максвелла или полной системе уравнений электродинамики:

$$
\begin{gathered}
rot\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \ , \\
rot\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ , \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \ , \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \ , \\
\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E} \ , \\
\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H} \ , \\
\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}^{cm} \ .
\end{gathered} \tag{1}
$$

Уравнения Максвелла записаны в системе СИ, в которой напряженность электрического поля измеряется в В/м, напряженность магнитного поля в А/м, магнитная индукция в Тесла, электрическая в Кл/м, плотность тока в А/м^2, $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$.

Если воспользоваться векторным тождеством

$$rot\,rot\,\boldsymbol{X} = grad\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{X} - \Delta\,\boldsymbol{X} \ ,$$

учтя, что $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, и исключить из уравнений Максвелла все величины кроме напряженности полей, то можно получить дифференциальные уравнения второго порядка.

Умножим 1-е уравнение Максвелла на ε^{-1} и применим операцию rot :

$$rot\left(\varepsilon^{-1} rot\,\boldsymbol{H}\right) = rot\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + rot\left(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{j}\right) \ . \tag{2a}$$

Так же поступим со вторым уравнением ($rot\ \mu^{-1}$):

$$rot\left(\mu^{-1} rot\,\boldsymbol{E}\right) = -rot\left(\mu^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \ . \tag{2b}$$

Далее приведена последовательность преобразований для правых частей:

$$rot\left(\varepsilon^{-1} rot\,\boldsymbol{H}\right) = rot\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E})\right) + rot\left(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{j}\right) \,, \tag{3a}$$

$$rot\left(\mu^{-1} rot\,\boldsymbol{E}\right) = -rot\left(\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu \boldsymbol{H})\right) \,. \tag{3b}$$

Для однородной среды $\varepsilon = const$ и $\mu = const$, поэтому

$$rot\left(\varepsilon^{-1} rot\,\boldsymbol{H}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\boldsymbol{E}\right) + rot\left(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{j}\right) \,, \tag{4a}$$

$$rot\left(\mu^{-1} rot\,\boldsymbol{E}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\boldsymbol{H}\right) \,. \tag{4b}$$

Далее подставляем вместо $rot\,\boldsymbol{E}$ и $rot\,\boldsymbol{H}$ правые части первого и второго уравнений Максвелла соответственно:

$$rot\left(\varepsilon^{-1} rot\,\boldsymbol{H}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) + rot\left(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{j}\right) \,,$$

$$rot\left(\mu^{-1} rot\,\boldsymbol{E}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) \,.$$

Далее используя материальные уравнения и то, что $\varepsilon\mu = c^{-2}$, можно получить

$$rot\left(\varepsilon^{-1} rot\,\boldsymbol{H}\right) = -\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + rot\left(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{j}\right) \,,$$

$$rot\left(\mu^{-1} rot\,\boldsymbol{E}\right) = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \,.$$

Применим для левых частей векторное тождество для двойного rot и постоянство проницаемостей в однородной среде:

$$grad\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + rot\,\boldsymbol{j} \,,$$

$$grad\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \,.$$

Учитывая, что $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$ и $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ окончательно получим

$$\Delta\,\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -rot\,\boldsymbol{j}\ , \tag{5a}$$

$$\Delta\,\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\nabla\rho+\mu\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\ . \tag{5b}$$

Уравнения (5) в электродинамике называются *уравнениями Даламбера*. Если токи и заряды отсутствуют, то (5a) и (5b) становятся однородными и называются *волновыми*. Для напряженности электрического поля волновое уравнение имеет следующий вид:

$$\Delta\,\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\ . \tag{6}$$

Если поискать решение (6) в виде разложения по монохроматическим составляющим

$$E(\boldsymbol{r},z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}E_\Omega(\boldsymbol{r},z,t)e^{i\Omega t}d\Omega\ , \tag{7}$$

то предполагая временную зависимость вида $e^{i\Omega t-\phi}$, что означает $\frac{\partial}{\partial t}=i\Omega$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}=-\Omega^2$, можно получить уравнение Гелмгольца

$$(\Delta+\mu k^2)E_\Omega=0\ .$$

Для большинства сред, в которых имеет смысл рассматривать распространение радиоволн $\mu\approx1$. Таким образом уравнение Гелмгольца можно рассматривать в виде

$$(\Delta+k^2)E_\Omega=0\ , \tag{8}$$

$k=\frac{\Omega}{c}\sqrt{\varepsilon}=\frac{\Omega}{c}n$, где n - показатель преломления.

Для простоты будем рассматривать среды без потерь, т.е. предполагать, что k - действительное число или $\mathrm{Im}\,k\approx0$.

Представим теперь E_Ω в виде разложения по плоским волнам

$$E_\Omega(\boldsymbol{r},z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_{\Omega\kappa}(z)e^{i\kappa\boldsymbol{r}}d\kappa^2\ , \tag{9}$$

где $d\kappa^2 = d\kappa_x d\kappa_y$. Подстановка (9) в (8) приводит к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \kappa^2\right) E_{\Omega\kappa} = 0 \quad , \tag{10}$$

где $\kappa^2 = \boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{\kappa} = \kappa_x \kappa_x + \kappa_y \kappa_y$. Решение этого уравнения можно записать в виде

$$E_{\Omega\kappa} = E^{(0)}_{\Omega\kappa} \exp\{-i\, sgn\Omega \sqrt{k^2 - \kappa^2}\, z\} \quad , \tag{11}$$

где $sgn\Omega$ это знак числа Ω . Подстановка (11) в (9), а затем в (7) дает решение (6) для скалярного поля в виде

$$E(\boldsymbol{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}_{\Omega\kappa} \exp\{i\Omega t + i\boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{r} - i\, sgn\Omega \sqrt{k^2 - \kappa^2}\, z\}\, d\Omega\, d\kappa^2 \quad , \tag{12}$$

которое можно записать еще как

$$E(\boldsymbol{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}_{\Omega\kappa} \exp\{i\Omega t + i\boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{r} - i \sqrt{k^2 - \kappa^2}\, z\} d\Omega\, d\kappa^2 + \text{к.с.} \quad . \tag{12}$$

В оптике и радиофизике часто используют укороченные уравнения для комплексных амплитуд. Плоская волна в терминах комплексной амплитуды может быть записана как

$$E(z, t) = \frac{1}{2} A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к.с.} \quad , \tag{13}$$

где $k_0 = \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c} = \frac{\omega_0}{v}$. Для упрощенного рассмотрения удобно рассматривать так называемую квазиплоскую квазимонохроматическую волну

$$E(\boldsymbol{r}, z, t) = \frac{1}{2} A\, e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad ,$$

где, однако, комплексная амплитуда $A = A(\boldsymbol{r}, z, t)$ медленно меняется. Укороченное уравнение это такое, в котором сделан переход от уравнения для E сделан переход к уравнению для A . Если сделать подстановку в (12) используя $\Omega = \omega_0 + \omega$ и $2E^{(0)}_{\Omega\kappa} = 2E^{(0)}_{\omega_0 + \omega, \kappa} \equiv A^{(0)}_{\omega\kappa}$, то можно получить

$$A(\boldsymbol{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa^2 A^{(0)}_{\omega\kappa} \exp\{i\omega t + i\boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{r} + i(k_0 - \sqrt{k^2 - \kappa^2}) z\}\, d\omega \quad , \tag{14}$$

где $k_0 = k(\omega_0)$ и $k = k(\omega_0 + \omega)$. Квазимонохроматичность и квазиплоскостность поля означают, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \qquad \kappa^2 \ll k^2, \qquad \sqrt{k^2 - \kappa^2} \approx k - \frac{\kappa^2}{2k} \quad .$$

С учетом квазимонохроматичности и квазиплоскостности, комплексная амплитуда квазимонохроматического *параксиального* поля

$$A(\boldsymbol{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, d\kappa^2 A^{(0)}_{\omega\kappa} \exp\left\{ i\omega t + i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{r} + iz\left[k(\omega_0) - k(\omega_0 + \omega) + \frac{\kappa^2}{2k(\omega_0 + \omega)} \right] \right\} \quad . \tag{15}$$

Распространение немонохроматической плоской волны

Поле источника для волны в вакууме

$$E(z=0, t) \;=\; E^{(0)}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}_{\Omega} e^{i\Omega t} d\Omega \quad . \tag{16}$$

В вакууме $n(\Omega) = 1, \quad k(\Omega) = \dfrac{\Omega}{c}$. Если положить $E^{(0)}_{\Omega\kappa} \;=\; E^{(0)}_{\Omega}\delta(\boldsymbol{\kappa})$, то подстановка в (12) даст следующее выражение:

$$E(z, t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}_{\Omega} e^{-i\Omega(t - z/c)} d\Omega \;=\; E^{(0)}(t - z/c) \quad . \tag{17}$$

Из (17) следует, что произвольный импульс (16) переносится вдоль оси z без искажений, ни дифракция, ни дисперсия не проявляются.

Монохроматическая параксиальная волна в вакууме

Для рассмотрения этого случая воспользуемся выражением (15). В случае монохроматичной параксиальной волны

$$A^{(0)}_{\omega\kappa} \;=\; A^{(0)}_{\kappa}\delta(\omega) \quad . \tag{18}$$

Подстановка (18) в (15) дает выражение

$$A(\boldsymbol{r}, z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} A^{(0)}_{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{r} + i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2 \quad . \tag{19}$$

Используя (19) можно получить волновое уравнение, которому удовлетворяет комплексная амплитуда $A(\boldsymbol{r}, z)$. Для этого нужно придифференциировать выражение (19):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} &= i\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_x A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2 \\
\frac{\partial A}{\partial y} &= i\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_y A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2 \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_x^2 A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2 \\
\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_y^2 A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2 \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{i}{2k_0}\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}} d\kappa^2
\end{aligned} \tag{20}$$

Сопоставивив выражения (20) можно увидеть, что $A(\boldsymbol{r}, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k_0}\Delta_{xy} A = 0 , \tag{21}$$

где $\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - поперечный лапласиан. Уравнение (21) это параболлическое уравнение, так называемое уравнение *квазиоптики*. Из (19) при $z=0$ можно получить

$$A(\boldsymbol{r}, z=0) = A^{(0)}(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} A_\kappa^{(0)} e^{i\boldsymbol{\kappa r}} d\kappa^2 ,$$

что представляет собой преобразование Фурье, а следовательно можно записать и обратное преобразование

$$A_\kappa^{(0)} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} A^{(0)}(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{\kappa r}'} dr'^2 . \tag{22}$$

Подстановка (22) в (19) приводит к

$$A(\boldsymbol{r}, z) \;=\; \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dr'^2\, d\kappa^2 A^0(\boldsymbol{r}')\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})+i\frac{\kappa^2 z}{2k_0}\right) \;=$$

что после интегрирования по $d\kappa_x d\kappa_y$ приводит к выражению

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} A^{(0)}(\boldsymbol{r}')H(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dr'^2 \quad , \tag{23}$$

где функция Грина $H(\boldsymbol{r}) = ???$ (получить самостоятельно).

Немонохроматическая параксиальная волна в вакууме

Используем выражение (12) учтя, что параксиальное приближение означает, что

$$\kappa^2 \;\ll\; k^2, \qquad \sqrt{k^2-\kappa^2} \;\approx\; k - \frac{\kappa^2}{2k} \quad ,$$

а также то обстоятельство, что в вакууме $k = \dfrac{\Omega}{c}$. Тогда можно получить

$$E(\boldsymbol{r}, z, t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa^2 E^{(0)}_{\Omega\kappa}\exp\left\{i\Omega t+i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{r}-i\frac{\Omega z}{c}+i\frac{\kappa^2 z c}{2\Omega}\right\} \quad ,$$

а если ввести запаздывающее время $\theta = t - z/c$, то

$$E(\boldsymbol{r}, z, t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega\, d\kappa^2 E^{(0)}_{\Omega\kappa}\exp\left\{i\Omega\theta+i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{r}+i\frac{c\kappa^2 z}{2\Omega}\right\} \quad . \tag{24}$$

Дифференциирование (24) приводит к нестационарному параболлическому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\theta\,\partial z} \;-\; \frac{c}{z}\Delta_{xy}E \;=\; 0 \quad . \tag{25}$$

Решение (24) описывает решение (25) в частотно-волновом представлении, т.е. через компоненты $E^{(0)}_{\Omega\kappa}$. Если волна квазимонохроматическая, то

$$E(\boldsymbol{r},z,t) \;=\; \frac{1}{2}Ae^{i(\omega_0 t-k_0 z)}+\text{к.с.}$$

и подстановка этого выражения в (25) дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{i}{\omega_0}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\partial z}+\frac{i}{2k_0}\Delta_{xy}A \;=\; 0 \quad . \tag{26}$$

Второе слагаемое в (26) учитывает влияние временной модуляции на эффект дифракции. Подстановка $A(\theta,\boldsymbol{r},z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_\omega(\boldsymbol{r},z)e^{i\omega\theta}d\omega$ в (26) приводит к следующему уравнению для спектральных компонент:

$$\frac{\partial A_\omega}{\partial z}+\frac{i}{2(1+\omega/\omega_0)k_0}\Delta_{xy}A_\omega \;=\; 0 \quad . \tag{27}$$

Из уравнения (27) можно сделать вывод, что длинноволновые компоненты ($\omega<0$) будут дифрагировать медленнее чем коротковолновые ($\omega>0$). Если $\Delta\omega\ll\omega_0$, то (27) переходит в выражение для монохроматической волны (21).

Квазимонохроматическая плоская волна

Для этого случая $A^{(0)}_{\omega\kappa}=A^{(0)}_\omega\delta(\boldsymbol{\kappa})$, подстановка этого выражения в (15) и интегрирование по $d\kappa^2$ приводит к выражению

$$A(z,t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, A^{(0)}_\omega \exp\{i\omega t+iz[k(\omega_0)-k(\omega_0+\omega)]\} \quad . \tag{28}$$

Квазимонохроматичность означает, что $|\omega|\ll\omega_0$, а следовательно можно воспользоваться разложением

$$k(\omega_0)-k(\omega_0+\omega) \;=\; -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}K(\omega_0+\omega)|_{\omega=0}\,\omega^m \;=\; -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_m}{m!}\omega^m \quad . \tag{29}$$

С учетом (28) и (29) можно записать

$$\begin{aligned} A(z,t) \;&=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, A^{(0)}_\omega \exp\left\{i\omega t-izk_1\omega-iz\sum_{m=2}^{\infty}\frac{k_m}{m!}\omega^m\right\} \;= \\ &=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, A^{(0)}_\omega \exp\{i\omega\theta-iz\psi(\omega)\} \end{aligned} \quad , \tag{30}$$

где $\theta=t-k_1 z=t-z/u$, $u=1/k_1$ - групповая скорость волны на частоте

ω_0 . Дифференциирование по θ и z приводит к упавнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_m}{m!} \left(\frac{\partial}{i \partial \theta} \right)^m A = 0 \; . \qquad (31)$$

Каждый из коэффициентов k_m описывает дисперсионные эффекты m-го порядка. Учет явлений только 2-го порядка приводит к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \; . \qquad (32)$$

Уравнение (32) похоже на уравнение для монохроматической параксиальной волны (21). Поэтому можно провести аналогии между пространственно-временными эффектами, например между фокусировкой и дифракционным расширением и компрессией и расплыванием импульсов. Согласно (30) решением (32) будет

$$A(\theta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_\omega^{(0)} \exp\left\{ i\omega\theta - i \frac{z k_2}{2} \omega^2 \right\} d\omega \; . \qquad (33)$$