Статистическая радиофизика и теория информации

Лекция 13

16. Модели и статистические характеристики случайных волн

Случайными является поле световой волны излучаемой нелазерным источником света. Случайными полями являются поля температуры, влажности, диэлектрической проницаемости в реальной атмосфере. Только прохождение волн через такую среду делает их случайными.

Рассмотрим скалярное случайное поле

$$E = E(t, \boldsymbol{r}) \ ,$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$ - трехмерный вектор и $M[E]=0$, что характерно для полей рассматриваемых в радиофизике и оптике.

Общий вид корреляционной функции для полей:

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = M\left[E(\boldsymbol{r_1}, t_1) E(\boldsymbol{r_2}, t_2)\right] \ . \tag{1}$$

Поле является *стационарным* если

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = R(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, t_2 - t_1) = R(\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_2}, \tau) \ , \tag{2}$$

однородным если

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = R(t_1, t_2, \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}) = R(t_1, t_2, \boldsymbol{s}) \ , \tag{3}$$

однородное поля является *изотропным* если

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = R(t_1, t_2, |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_2}|) = R(t_2, t_2, s) \ . \tag{4}$$

Поле может быть одновременно и стационарным и однородным, тогда

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_1) = R(t_2 - t_1, \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}) = R(\tau, \boldsymbol{s}) \ . \tag{5}$$

Еще выделяют класс факторизованных полей, для которых выполняется

$$E(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r}) f(t) \ . \tag{6}$$

В этом случае

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = R_F(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}) R_f(t_1, t_2) \quad , \tag{7}$$

причем если F - однородное поле, а f - стационарный случайный процесс, то

$$R(\boldsymbol{r_1}, t_1, \boldsymbol{r_2}, t_2) = R_F(\boldsymbol{s}) R_f(\tau) \quad . \tag{8}$$

Частотно-волновой спектр $G(\omega, \boldsymbol{k})$ случайных полей является аналогом энергетического спектра $S(\omega)$ для скалярных случайных процессов. Теорема Винера-Хинчина связывает энергетический спектр $S(\omega)$ стационарных случайных процессов и корреляционную функцию через преобразование Фурье. Аналогичным образом для стационарных и однородных полей связаны корреляционная функция и частотно-волновой спектр:

$$R(\tau, \boldsymbol{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-i\omega\tau - i\boldsymbol{ks}} d\omega dk^3 \quad , \tag{9}$$

$$G(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau, \boldsymbol{s}) e^{i\omega\tau + i\boldsymbol{ks}} d\tau ds^3 \quad . \tag{10}$$

Выражения (9) и (10) есть обобщение на стационарные и однородные поля формул Винера-Хинчина. Если положить $G(\omega, \boldsymbol{k}) = S(\omega)\delta(\boldsymbol{k})$, то эти формулы перейдут в формулы теоремы Винера-Хинчина для стационарных случайных процессов. Из (9) и (10) при действительности функций R и G следует четность этих функций, т.е.

$$\begin{aligned} R(-\tau, -\boldsymbol{s}) &= R(\tau, \boldsymbol{s}) \quad , \\ G(-\omega, -\boldsymbol{k}) &= G(\omega, \boldsymbol{k}) \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Постоянные изотропные поля

Рассмотрим постоянное во времени поле, так что меняются только случайные пространственные характеристики. Тогда

$$R(\tau, \boldsymbol{s}) = R(\boldsymbol{s}) \quad ,$$

$$G(\omega, \boldsymbol{k}) = G(\boldsymbol{k}) \delta(\omega)$$

и формулы (9) и (10) примут вид

$$R(\boldsymbol{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{s}} dk^3 \quad , \tag{12}$$

$$G(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} R(\boldsymbol{s}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{s}} ds^3 \quad . \tag{13}$$

Рассмотрим случай постоянного изотропного **объемного поля**. Для этого перейдем в (13) к сферическим координатам s, θ, φ с отсчетом угла θ от направления $\boldsymbol{k}$. Это приведет к преобразованию выражения (13) к виду

$$G(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} R(s) e^{iks\cos\theta} s^2 ds = \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} s R(s) \sin(ks) ds \quad . \tag{14}$$

Из (14) ясно, что $G(-k) = G(k)$, а также то, что волновой спектр изотропного поля также изотропен. Аналогичное преобразование приводит (12) к виду

$$R(s) = \frac{4\pi}{s} \int_0^{\infty} G(k) k \sin(ks) dk = R(-s) \quad . \tag{15}$$

Теперь рассмотрим случай постоянного изотропного **плоского поля**. Рассмотрим поле на плоскости XY, т.е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{e}_x \kappa_x + \boldsymbol{e}_y \kappa_y \quad .$$

В этом случае (9) и (10) примут вид

$$R(s) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\kappa s) G(\kappa) \kappa d\kappa \quad , \tag{17}$$

$$G(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{(0)}^{\pi} J_0(\kappa s) R(s) s ds \quad . \tag{18}$$

Здесь $J_0(x)$ это функция Бесселя первого рода 0-го порядка, которая имеет интегральное представление

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos\theta) d\theta \quad .$$

Поскольку $R(s) \to 0$ при $s \to \infty$, то характерным параметром пространственной корреляционной функции является *радиус корреляции* $r_к$, то есть некоторая характерная ширина корреляционной функции. Часто используется такое определение этого параметра:

$$r_к = \frac{\int_0^\infty R(s)\,ds}{R(0)} \quad . \tag{19}$$

Аналогичным образом можно ввести *ширину волнового спектра* как

$$\Delta k = \frac{\int_0^\infty G(k)\,dk}{G(0)} \quad , \tag{20}$$

где $G(0) = G(k)_{max}$. Оценки (19) и (20) удобны еще и тем, что $r_к$ и Δk могут быть выражены как через корреляционную функцию, так и через волновой спектр. Покажем это для изотропного поля. Согласно (14) и (15)

$$\begin{aligned} R(0) &= 4\pi \int_0^\infty G(k) k^2 dk \quad , \\ G(0) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty R(s) s^2 ds \quad . \end{aligned} \tag{21}$$

При получении выражений (21) учтено, что $(\sin(x)/x)_{x=0} = 1$. Теперь определим выражения из числителей (19) и (20).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R(s)\,ds &= \int_0^\infty ds \frac{4\pi}{s} \int_0^\infty G(k)\, k \sin(ks)\, dk = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk\, G(k)\, k \int_0^\infty ds \frac{\sin(ks)}{s} = \\ &= 2\pi^2 \int_0^\infty G(k)\, k\, dk \end{aligned} \tag{22a}$$

Здесь использован табличный интеграл $\int_0^\infty x^{-1} \sin(px)\,dx = \pi/2$. Аналогичным образом можно получить

$$\int_0^\infty G(k)\,dk = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R(s)\, s\, ds \quad . \tag{22b}$$

Подстановка (21), (22a) в (19) дает выражение

$$r_\kappa = \frac{\int_0^\infty R(s)\,ds}{R(0)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\int_0^\infty G(k)\,k\,dk}{\int_0^\infty G(k)\,k^2\,dk} \ . \qquad (23a)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\Delta k = \frac{\int_0^\infty G(k)\,dk}{G(0)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\int_0^\infty R(s)\,s\,ds}{\int_0^\infty R(s)\,s^2\,ds} \ . \qquad (23b)$$

Теперь проделаем то же для плоского поля. Используя (17), (18), а также табличный интеграл $\int_0^\infty J_0(bx)\,dx = \frac{1}{b}$, найдем что

$$R(0) = 2\pi\int_0^\infty G(\kappa)\,\kappa\,d\kappa \ ,$$

$$G(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(s)\,s\,ds \ ,$$

$$\int_0^\infty B(s)\,ds = 2\pi\int_0^\infty G(\kappa)\,d\kappa \ .$$

Подстановка этих выражений в (19) и (20) даст следующие выражения:

$$r_\kappa = \frac{\int_0^\infty G(\kappa)\,d\kappa}{\int_0^\infty G(\kappa)\,\kappa\,d\kappa} \ ,$$

(24)

$$\Delta k = \frac{\int_0^\infty R(s)\,ds}{\int_0^\infty R(s)\,s\,ds} \ .$$

Радиус корреляции зарактеризует статистическую связь или **когерентность** полей $E(\boldsymbol{r_1})$ и $E(\boldsymbol{r_2})$. Если $|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}| \gg r_к$, то поля статистически независимы и наоборот поля статистически зависимы если разност координат порядка или меньше радиуса корреляции. В оптике обычно используют **степень когерентности**, определяемую как

$$\gamma_E = \frac{M\left[E(\boldsymbol{r_1})E(\boldsymbol{r_2})\right]}{\sqrt{M\left[E^2(\boldsymbol{r_1})\right]M\left[E^2(\boldsymbol{r_2})\right]}} ,$$

причем $1 \le \gamma_E \le 1$. Эта величина является аналогом коэффичиента корреляции для случайных процессов. Для квазиплоской квазимонохроматической волны можно воспользоваться представлением через комплексные амплитуды:

$$\gamma_A = \frac{M\left[A_1 A_2^*\right]}{\sqrt{M\left[|A_1|^2\right]M\left[|A_2|^2\right]}} .$$