

## Задачи для закрепления материала.

### Задача 1

Найти корреляционную функцию случайного процесса  $X(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $\varphi$  — случайная величина с равномерным распределением на  $[0, 2\pi)$  (т.е. ее плотность распределения  $w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

### Задача 2

Пусть  $X(t)$  и  $Y(t)$  — независимые стационарные в широком смысле случайные процессы с корреляционными функциями  $R_X$  и  $R_Y$  соответственно. Найти корреляционную функцию процесса  $Z(t) = X(t)Y(t)$ .

### Задача 3

Пусть случайный процесс  $X(t)$  это телеграфный сигнал, который имеет значение либо 1, либо -1. Смена полярности происходит с вероятностью 1/2 в фиксированные моменты времени  $t = -kT, -(k-1)T, \dots, 0, T, 2T, \dots, kT$ , где  $T$  известная неслучайная величина. Найти а) среднее значение  $m_x$ , б) корреляционную функцию и в) дисперсию случайного процесса  $X(t)$ . Что можно сказать о стационарности такого сигнала?

### Задача 4

Установить необходимые и достаточные условия стационарности случайного процесса

$$X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где  $a$  и  $b$  — случайные величины, фиксированные для каждой реализации с.п.

**Определение:** Белым шумом называется такой случайный процесс, который имеет дельтаобразную корреляционную функцию, т.е.

$$R(\tau) = S_0 \delta(\tau) \quad \text{для стационарного б.ш.}$$

или

$$R(t_1, t_2) = S(t_1) \delta(t_2 - t_1) \quad \text{для нестационарного б.ш.}$$

### Задача 5

Пусть  $X(t) = m_x + v(t)$ , где  $v(t)$  — белый шум, такой что  $R_v(\tau) = S_0 \delta(\tau)$ . Является ли с.п.  $X(t)$  эргодическим по среднему?

### Задача 6

Найти энергетический спектр случайного процесса, если его корреляционная функция  $R(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ ,  $\alpha > 0$ .

### Сводка формул к задачам (шпаргалка).

$$2 \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)$$

$$2 \cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)$$

$$2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 - z_2) + \sin(z_1 + z_2)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

Табличный интеграл (используется в задаче 6 для  $q=0$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 \pm qx} dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Свойство дельта функции:

$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$